

NOTE TO USERS

**The original manuscript received by UMI contains light print.
All efforts were made to acquire the highest quality
manuscript from the author or school. Page(s) were
microfilmed as received.**

This reproduction is the best copy available

UMI

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

APPLICATION D'UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVE À
DES ÉCOULEMENTS AXISYMÉTRIQUES

ÉRIC TURGEON
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
JUILLET 1997

©Éric Turgeon, 1997.



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-33191-1

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

APPLICATION D'UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVE À
DES ÉCOULEMENTS AXISYMÉTRIQUES

présenté par: TURGEON Éric

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph.D., membre

À mes parents.

Remerciements

Je désire remercier en premier lieu mon directeur de recherche, M. Dominique Pelletier, pour son support sur les plans humain et scientifique et pour la confiance qu'il m'a témoignée.

Je remercie aussi les autres membres du groupe GRMIAO, professeurs et étudiant(e)s, qui n'ont pas hésité à me conseiller ou à répondre à mes questions et qui ont rendu ce séjour agréable et motivant.

J'adresse aussi mes remerciements au Conseil de la Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) qui a contribué à la réalisation de ce mémoire par son appui financier.

Je veux enfin souligner le support que j'ai reçu des membres de ma famille par leur amitié, leur amour et leur compréhension.

Résumé

Ce mémoire présente une extension au cas axisymétrique d'une méthode d'éléments finis adaptative pour la résolution d'écoulements incompressibles turbulents, avec des applications. Un écoulement turbulent est physiquement instationnaire. Par souci de simplification, on le décompose cependant en un écoulement moyen stationnaire et des fluctuations. Le modèle mathématique utilisé est basé sur les équations moyennes de Reynolds et l'approximation de Boussinesq qui ne font intervenir que les quantités moyennes des inconnues. Il en résulte des équations similaires aux équations de Navier-Stokes avec l'addition d'une viscosité turbulente. Le système mathématique est fermé avec le modèle de turbulence $k-\epsilon$ standard pour de hauts nombres de Reynolds. Ce modèle ne peut être utilisé près des parois solides. On a recourt dans ces cas à l'utilisation d'une loi de paroi, plus spécifiquement une loi à deux échelles de vitesse.

On effectue un changement de variables dépendantes qui introduit les logarithmes naturels des variables d'origine: $K = \ln(k)$ et $E = \ln(\epsilon)$. Les équations de k et ϵ sont ainsi réécrites en termes des variables K et E . Cette transformation permet d'éliminer les problèmes classiques de la préservation de la positivité des variables de turbulence. En effet, on résout le système d'équations contenant K et

E , puis on récupère k et ϵ par l'évaluation d'exponentielles ce qui génère toujours des quantités positives. La viscosité turbulente est alors toujours positive elle aussi. Cette technique présente aussi de nombreux avantages du point de vue de la précision de la solution et de la robustesse de la méthode de résolution, notamment à cause des variations beaucoup moins sévères des quantités K et E par rapport à leurs correspondants k et ϵ .

Les écoulements turbulents sont des écoulements à faible viscosité, même avec l'ajout d'une viscosité turbulente. Il en résulte qu'ils sont fréquemment dominés par la convection. La résolution de tels écoulements avec une méthode d'éléments finis classique de type Galerkin a tendance à générer des oscillations, particulièrement sur des maillages grossiers. On a donc recours à des méthodes dites de stabilisation qui ont pour but de diminuer ces oscillations tout en réduisant le moins possible la précision de la solution. Ces techniques augmentent aussi la robustesse de la résolution en facilitant la convergence du processus itératif. Plusieurs variantes de ces techniques sont considérées.

La résolution numérique se fait dans le cadre d'une méthodologie adaptative. Cette méthodologie a pour but d'optimiser les ressources disponibles pour maximiser la précision de la solution en adaptant le maillage au problème particulier qui est résolu. On utilise des maillages non structurés constitués d'éléments triangulaires de Crouzeix-Raviart avec interpolants quadratiques pour K et E . L'idée consiste à estimer l'erreur d'une solution obtenue sur un maillage donné et de s'en servir pour générer un nouveau maillage mieux adapté à la solution et de plus en plus raffiné à chaque étape. Ce processus adaptatif avec estimation d'erreur permet d'évaluer dans une certaine mesure la précision numérique de la solution et d'y porter un

certain degré de confiance. Notons que le but de ce travail est surtout d'obtenir des solutions numériques précises aux équations et non de générer des solutions près des valeurs expérimentales (i.e. d'avoir un bon modèle de turbulence). La méthode d'estimation d'erreur utilisée dans ce travail est une méthode de projection locale par moindres carrés.

La première série de simulations présentée se concentre sur la vérification. On résout des problèmes dont on connaît la solution exacte, ce qui permet de vérifier tant la performance du résolveur que du processus de remaillage adaptatif dans son ensemble. Ces cas test s'apparentent à des jets et démontrent clairement la robustesse de la méthode et la grande précision des résultats. Ils soulèvent cependant une lacune au niveau de la méthode d'estimation d'erreur utilisée lorsque la solution présente des décalages, c'est-à-dire lorsqu'elle surévalue ou sous-évalue constamment la solution exacte sur des portions importantes du domaine.

L'extension au cas axisymétrique a pour principal intérêt les nombreuses applications que l'on rencontre en pratique. On présente quelques applications typiques: développement d'un écoulement dans une conduite circulaire, écoulement dans une expansion brusque et une série de diffuseurs. En général, les résultats montrent la robustesse de la méthode qui réussit à produire des solutions indépendantes du maillage et du schéma éléments finis utilisé pour discrétiser les équations, si un nombre suffisant de cycles adaptatifs sont effectués. Les comparaisons avec les mesures expérimentales sont relativement bonnes dans l'ensemble, même si on observe des écarts parfois importants. Le modèle $k - \epsilon$ semble donc être assez représentatif de la réalité. On effectue aussi sur les diffuseurs une étude détaillée de l'influence des différentes formulations de stabilisation avec l'effet de l'adaptativité. Les solu-

tions sur des maillages grossiers s'avèrent être parfois très sensibles à la formulation utilisée. Il est cependant important d'observer que lorsque l'on raffine suffisamment le maillage, toutes les méthodes convergent vers la même solution.

Abstract

This thesis presents a generalization to axisymmetric flows of an adaptive finite element method for solving turbulent incompressible flows with applications. Turbulent flows are unsteady. The direct simulation of such flows is not feasible for engineering application, so simplifications are made: the instantaneous fluid velocities and pressure fields are expressed as the sum of a mean and a fluctuating component. The mathematical model used is based on the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations and the Boussinesq hypothesis, which are expressed only in terms of the mean values of the unknowns. This yields equations similar in form to the Navier-Stokes equations, with the addition of an eddy viscosity. The closure of this mathematical system is achieved by the standard $k - \epsilon$ model of turbulence for high Reynolds numbers. This model is inappropriate near solid walls, so wall functions are used (more specifically a two velocity scale wall function).

A change of dependant variables is made using the natural logarithms of the original variables: $K = \ln(k)$ and $E = \ln(\epsilon)$. The transport equations for k and ϵ are rewritten in terms of K and E . The main advantage of this procedure is that it eliminates the classical problem of positivity preservation for the turbulent quantities. With this approach, the equations using K and E are solved and then

k and ϵ are evaluated by taking the exponential of K and E , resulting in strictly positive values. Consequently, the eddy viscosity is also always positive. This technique also exhibits many advantages concerning the accuracy of the solution and the robustness of the solution algorithm. The greater smoothness of the distribution of the logarithmic variables compared to k and ϵ is the main reason for this improved behavior.

Turbulent flows are low viscosity flows in many parts of the flow, even with the addition of an eddy viscosity. Hence, these flows are frequently convection dominated. The solutions of such flows with a classical Galerkin finite element method may suffer from spurious oscillations, especially on coarse meshes. One way of improving solution quality is to use stabilised or upwinding methods which are designed to reduce or eliminate undesirable oscillations while maintaining as much as possible the solution accuracy. These techniques also facilitate the convergence of the iterative process, providing a more robust solver. Several stabilisation methods are considered.

The numerical solution is set in the context of an adaptive methodology. This methodology allows an optimisation of the resources to maximize the solution accuracy by adapting the mesh to the particular problem solved. Unstructured meshes of Crouzeix-Raviart triangular elements with quadratic interpolation for K and E are used. The idea of the adaptive process is to estimate the error of a solution obtained on a given mesh and use this estimation to generate a new mesh that is better suited to the solution and is more refined for enhanced accuracy. The adaptive process combined with error estimation provides a way of evaluating the numerical accuracy of the solution and helps to improve the level of confidence on the solution.

Note that the purpose of this thesis is to obtain accurate numerical solutions to the equations, not to generate solutions that match the experimental measurements. The error estimator used for this work is a least-squares local projection technique.

The first set of numerical results are focused on verification. Problems with a known analytical solution are solved, allowing for the verification of the performances of the solver and of the whole adaptive remeshing methodology. These test cases are constructed to simulate free jets and they clearly demonstrate that the methodology is robust and the results are very accurate. But they point out a deficiency of the error estimator when the solution exhibits an offset or shift (when the solution constantly under-evaluates or over-evaluates the exact solution over a large portion subdomain).

The main interest of the extension to axisymmetric flows is the wide variety of practical applications. Some of these applications are presented: developing turbulent flow in a pipe, flow in an axisymmetric sudden expansion and in a variety of diffusers. From a general point of view, the results show that the methodology is robust. Grid independent and discretisation scheme independent predictions can be achieved if enough cycles of adaptation are performed. Comparisons with experimental data show a generally good agreement, even if important differences sometimes occur. The $k - \epsilon$ model of turbulence seems to be quite representative of the reality for the cases studied. Studies on the influence of the stabilisation techniques for the diffusers were also performed. The solutions obtained on coarse meshes are sometimes very sensitive to the formulation used. It is important to notice here that all these methods converge to the same solution if mesh refinement is sufficient.

Table des Matières

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	x
TABLE DES MATIÈRES	xiii
LISTE DES TABLEAUX	xvi
LISTE DES FIGURES	xviii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xxii
LISTE DES ANNEXES	xxix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1: CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET BRÈVE RE- VUE BIBLIOGRAPHIQUE	3
1.1 Modélisation et résolution	4

1.2	Adaptativité	6
1.3	Contribution scientifique	9

CHAPITRE 2: MODÉLISATION ET MÉTHODE DE RÉSOLUTION

2.1	Équations moyennes	10
2.2	Modèle de turbulence $k - \epsilon$	12
2.3	Formulation variationnelle: résolution par la méthode des éléments finis	16
2.4	Conditions aux frontières pour les parois solides	20
2.4.1	Loi de paroi	21
2.4.2	Implantation de la loi de paroi	24
2.4.3	Implantation de la condition de tangence	27
2.5	Résolution en variables logarithmiques	30
2.6	Méthodes de stabilisation	33
2.6.1	Méthode SU	33
2.6.2	Méthode SUPG	35
2.6.3	Méthode GLS	36

CHAPITRE 3: ESTIMATION D'ERREUR ET REMAILLAGE ADAPTATIF

3.1	Estimation d'erreur	40
3.1.1	Introduction avec un exemple simple	41
3.1.2	Projection globale par moindres carrés	43
3.1.3	Projection locale	44
3.1.4	Récupération d'une distribution unique	47

3.1.5	Équations de Navier-Stokes et écoulements turbulents	49
3.2	Opérateur de transition	52
CHAPITRE 4: VÉRIFICATION		56
4.1	Jet analytique avec viscosité turbulente constante	57
4.2	Jet analytique avec viscosité turbulente variable	69
4.3	Jet analytique avec k modifié	75
4.4	Problème d'efficacité: décalage de la solution	84
4.4.1	Illustration sur le jet à viscosité constante (CAS1)	84
4.4.2	Illustration sur le jet à viscosité variable (CAS3)	87
4.4.3	Retour sur la méthode de projection	89
4.4.4	Causes potentielles du décalage	90
4.4.5	Conséquences et conclusions	95
CHAPITRE 5: APPLICATIONS		97
5.1	Développement d'un écoulement turbulent dans une conduite circulaire	97
5.2	Expansion brusque dans une conduite circulaire	109
5.3	Diffuseurs	127
5.3.1	Diffuseur à 15°	127
5.3.2	Diffuseur à 30°	128
5.3.3	Diffuseur à 45°	144
5.3.4	Diffuseur à 90°	145
5.3.5	Synthèse et conclusions	147
CONCLUSION		150
RÉFÉRENCES		153

Liste des tableaux

2.1	Constantes pour le modèle $k - \epsilon$	15
4.1	Erreur en vitesse (CAS1)	61
4.2	Erreur en K (CAS1)	61
4.3	Erreur en E (CAS1)	61
4.4	Erreur en μ_T (CAS1)	62
4.5	Erreur en vitesse (CAS2)	64
4.6	Erreur en K (CAS2)	64
4.7	Erreur en E (CAS2)	64
4.8	Erreur en μ_T (CAS2)	65
4.9	Erreur en vitesse (CAS3)	71
4.10	Erreur en K (CAS3)	72
4.11	Erreur en E (CAS3)	72
4.12	Erreur en μ_T (CAS3)	73
4.13	Erreur en vitesse (CAS4)	76
4.14	Erreur en K (CAS4)	76
4.15	Erreur en E (CAS4)	76
4.16	Erreur en μ_T (CAS4)	77
4.17	Répartition des efficacités élémentaires	77

5.1	Cisaillement à la paroi dans la zone pleinement développée	103
5.2	Évolution des maillages et de la longueur de la zone de recirculation pour l'expansion brusque	111
5.3	Distances à la paroi pour le diffuseur à 15°	128
5.4	Distances à la paroi pour le diffuseur à 30°	129
5.5	Distances à la paroi pour le diffuseur à 45°	144

Liste des figures

1.1	Processus de remaillage adaptatif	7
2.1	Contraintes sur un segment frontière	25
3.1	Sous-domaine Ω_S pour la projection locale	45
3.2	Projection locale et récupération d'un champ global	49
3.3	Zone d'influence pour la récupération des valeurs nodales	50
4.1	Géométrie pour le jet analytique	58
4.2	Séquence de maillages pour le CAS1	66
4.3	Solution pour le CAS1: u , v et ψ	67
4.4	Solution pour le CAS1: K , E , k et ϵ	68
4.5	Zones de faible efficacité (CAS3)	73
4.6	Solution pour le CAS3 (cycle 6): E , μ_T et le maillage	74
4.7	Trajectoire de l'erreur en vitesse (CAS4)	79
4.8	Trajectoire de l'erreur en K (CAS4)	79
4.9	Trajectoire de l'erreur en E (CAS4)	80
4.10	Trajectoire de l'erreur en μ_T (CAS4)	80
4.11	Solution pour le CAS4 (cycle 4): E , K , μ_T et le maillage	81
4.12	Histogramme de l'erreur estimée en vitesse (CAS4)	82

4.13	Histogramme de l'erreur estimée en K (CAS4)	82
4.14	Histogramme de l'erreur estimée en E (CAS4)	83
4.15	Histogramme de l'erreur estimée en μ_T (CAS4)	83
4.16	Isolignes de μ_T pour le CAS1	85
4.17	Coupe à $x = 0,8$ (CAS1): erreur sur μ_T et $\frac{\partial \mu_T}{\partial r}$ et indice d'efficacité correspondant	86
4.18	Coupe à $x = 0,85$ (CAS3): erreur sur K et sur $\frac{\partial K}{\partial r}$ et indice d'efficacité correspondant	88
4.19	Effet du décalage sur la qualité de la prédiction de l'erreur	90
4.20	Maillage pour le problème de conduction	92
4.21	Décalage avec une équation scalaire	94
5.1	Géométrie et conditions aux limites pour l'écoulement dans une con- duite	99
5.2	Maillage pour l'écoulement dans une conduite	99
5.3	Solution de l'écoulement dans une conduite	105
5.4	Profils de vitesse axiale pour l'écoulement dans une conduite	106
5.5	Coupes axiales de la vitesse axiale pour l'écoulement dans une conduite	106
5.6	Profil développé de k pour l'écoulement dans une conduite	107
5.7	Coupe du cisaillement turbulent à $x/D = 10$ pour l'écoulement dans une conduite	107
5.8	Coupe du cisaillement turbulent à $x/D = 29$ pour l'écoulement dans une conduite	108
5.9	Évolution du cisaillement à la paroi pour l'écoulement dans une conduite	108
5.10	Géométrie et conditions aux limites pour l'expansion brusque	110
5.11	Séquence de maillages pour l'expansion brusque	116

5.12	Agrandissement du maillage 5 de l'expansion brusque	117
5.13	Trajectoire de la longueur de la zone de recirculation pour l'expansion brusque	117
5.14	Solution sur le maillage initial pour l'expansion brusque	118
5.15	Solution sur le maillage final pour l'expansion brusque	119
5.16	Coupes de vitesse axiale à $x = 1$ pour l'expansion brusque	120
5.17	Coupes de vitesse axiale à $x = 2$ pour l'expansion brusque	120
5.18	Coupes de vitesse axiale à $x = 3$ pour l'expansion brusque	121
5.19	Coupes de vitesse axiale à $x = 4$ pour l'expansion brusque	121
5.20	Coupes de vitesse axiale à $x = 6$ pour l'expansion brusque	122
5.21	Coupes de vitesse axiale à $x = 8$ pour l'expansion brusque	122
5.22	Coupes de k à $x = 1$ pour l'expansion brusque	123
5.23	Coupes de k à $x = 3$ pour l'expansion brusque	123
5.24	Coupes de k à $x = 6$ pour l'expansion brusque	124
5.25	Coupes de k à $x = 8$ pour l'expansion brusque	124
5.26	Coupes de $\overline{u'v'}$ à $x = 1$ pour l'expansion brusque	125
5.27	Coupes de $\overline{u'v'}$ à $x = 3$ pour l'expansion brusque	125
5.28	Coupes de $\overline{u'v'}$ à $x = 6$ pour l'expansion brusque	126
5.29	Coupes de $\overline{u'v'}$ à $x = 8$ pour l'expansion brusque	126
5.30	Géométrie et conditions aux limites pour les diffuseurs	128
5.31	Trajectoire de la longueur de la zone de recirculation pour différentes formulations sur le diffuseur à 30°	130
5.32	Séquence de maillages pour le diffuseur à 30° avec la méthode de Galerkin	136
5.33	Séquence de maillages pour le diffuseur à 30° avec la méthode SU . .	137

5.34	Solution sur le maillage final pour le diffuseur à 30° avec la méthode de Galerkin	138
5.35	Coupes de u à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° avec la méthode de Galerkin	139
5.36	Coupes de u à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° avec la méthode SU . . .	139
5.37	Coupes de k à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° avec la méthode de Galerkin	140
5.38	Coupes de k à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° avec la méthode SU . . .	140
5.39	Coupes de u à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° sur le maillage initial . .	141
5.40	Coupes de u à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° sur le maillage final . . .	141
5.41	Coupes de k à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° sur le maillage initial . .	142
5.42	Coupes de k à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° sur le maillage final . . .	142
5.43	Vecteurs vitesse typiques près du coin avec une loi de paroi générale sur une paroi	143
5.44	Vecteurs vitesse typiques près du coin avec une loi de paroi générale sur trois parois	143
5.45	Trajectoire de la longueur de la zone de recirculation pour différentes formulations sur le diffuseur à 45°	145
5.46	Trajectoire de la longueur de la zone de recirculation pour différentes formulations sur le diffuseur à 90°	146

Liste des sigles et abréviations

Caractères usuels

a_i	coefficients du développement polynômial pour la projection locale
c	constante
C_μ, C_1, C_2	constantes du modèle $k - \epsilon$
d	distance à la paroi
D	diamètre d'une conduite
e	erreur
e_{cible}	erreur cible
E	paramètre de rugosité, logarithme naturel de ϵ
f	multiplicateur de Lagrange pour la condition de tangence, coefficient de friction
f	force massique
G	fonction pour les lois de paroi
h	taille des éléments

H^1	espace de Hilbert
I, J	fonctionnelles
k	énergie cinétique de la turbulence
K	constante de Kármán, logarithmique naturel de k
L	longueur de référence
L^2	espace des fonctions de carré sommable
n_{elem}	nombre d'éléments
\hat{n}	vecteur unitaire normal à la frontière
N	nombre de noeuds
N, N_i	fonction d'interpolation
N_e	nombre d'éléments
p	pression moyenne
P	pression instantannée, terme de production, base polynômiale pour la projection locale, point associé à une projection
Pe	nombre de Péclet
q	quantité à projeter
\mathbf{q}	vecteur gradient à projeter
R	résidu fort d'une équation différentielle, rayon d'une conduite
R_p	résidu fort de l'équation de continuité
R_u	résidu fort des équations de mouvement
\mathbf{R}, R_{ij}	tenseur de Reynolds

Re	nombre de Reynolds, $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$
Re_T	nombre de Reynolds turbulent
s	scalaire
\mathbf{S}, \mathbf{T}	tenseurs
t	temps
t_0	temps initial
$\hat{\mathbf{t}}$	vecteur unitaire tangent à la frontière, tractions sur les frontières
$\hat{\mathbf{t}}_0$	conditions naturelles imposées sur les équations de mouvement
T	intervalle de temps, température, scalaire
\mathbf{T}	vecteur des tractions sur les frontières
u, v, w	composantes de la vitesse dans le repère (x, r, θ)
u_c	vitesse axiale sur l'axe de symétrie
u_τ	vitesse de frottement
u_*	échelle de vitesse reliée à la turbulence
\mathbf{u}	vecteur vitesse moyenne
\mathbf{u}, \mathbf{v}	vecteurs
\mathbf{u}'	fluctuation de la vitesse
\mathbf{u}_0	conditions essentielles imposées sur \mathbf{u}
\mathbf{U}	vecteur vitesse instantannée
V	vitesse de référence, module de la vitesse
w	fonction test pour les équations de turbulence, fonction test générale

W_i	fonction test
W_i^{SU}	fonction test pour la méthode SU
x, r, θ	coordonnées cylindriques
y	distance normale à la paroi
y_c^+	limite entre les deux zones de la loi de paroi

Lettres caligraphiques

\mathcal{Q}	espace des fonctions test de la pression
\mathcal{V}	espace des fonctions test de la vitesse

Lettres grecques

α	taux de convergence de l'élément
$\dot{\gamma}$	tenseur du taux de déformation
Γ	frontière
Γ_u	portion des frontières $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions essentielles sur les équations de mouvement
Γ_i	portion des frontières $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions naturelles sur les équations de mouvement
Γ_{i_k}	portion des frontières $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions naturelles sur k

$\Gamma_{i\epsilon}$	portion des frontières $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions naturelles sur ϵ
δ	opérateur de variation, fonction de taille, paramètre de stabilisation
$\delta p, \delta \mathbf{u}$	fonctions test pour la continuité et les équations de mouvement
δ_{ij}	delta de Kronecker
ϵ	taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence
ϵ_0	constante
η	variable de similitude pour le jet
θ	angle du diffuseur
Θ	indice d'efficacité
λ	coefficient de diffusion
λ_{ij}	tenseur de diffusion artificielle
$\tilde{\lambda}$	coefficient de diffusion artificielle
μ	viscosité dynamique
μ_T	viscosité turbulente
ν	viscosité cinématique
ξ	facteur de réduction de l'erreur
ρ	masse volumique
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	constantes du modèle $k - \epsilon$
Σ	symbole de sommation
τ	coefficient de stabilisation

τ_w	cisaillement à la paroi
τ_{turb}	cisaillement turbulent
τ	tenseur des contraintes visqueuses
τ^*	tenseur des contraintes totales
ψ	lignes de courant
Ω	domaine de calcul
Ω^e	intérieur de l'élément e
Ω_{proj}	sous-domaine de projection
Ω_S	sous-domaine pour la projection locale
$\partial\Omega$	frontières du domaine Ω

Indices et exposants

E	champ du logarithmique naturel de ϵ
ex	valeur exacte
h	solution par éléments finis
i	valeur nodale, fonction associée au noeud i
k	champ d'énergie cinétique de la turbulence
K	champ du logarithmique naturel de k , élément
n	composante normale
p	champ de pression

t	composante tangentielle
T	transposée
u	champ de vitesse, champ de vitesse radiale
v	champ de vitesse axiale
w, p	valeur à la paroi
x, r, θ	composantes selon le repère cylindrique (x, r, θ)
ϵ	champ du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence
μ_T	champ de viscosité turbulente
Ω	domaine de calcul
$+$	valeur adimensionnelle dans la loi de paroi
$*$	valeur projetée
\sim	valeur projetée récupérée dans les interpolants de la solution
$'$	fluctuations
$-$	valeur moyenne

Symboles

∇	gradient
$\nabla \cdot$	divergence
$\ \cdot \ $	norme

Liste des annexes

Annexe A: Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques	158
Annexe B: Méthodes d'éléments finis stabilisées	162

Introduction

La mécanique des fluides trouve des applications presque partout. Elle suscite donc depuis longtemps un grand intérêt en ingénierie. Dans la gamme des différentes avenues de la mécanique des fluides, on porte une attention particulière aux écoulements incompressibles turbulents. Ces écoulements complexes et difficiles à modéliser font l'objet de nombreux travaux à cause de leur intérêt pratique. En particulier, les écoulements axisymétriques se rencontrent dans de nombreuses applications telles les écoulements dans des conduites circulaires, les diffuseurs, les chambres de combustion, etc...

Une nouvelle voie d'étude de la mécanique des fluides a pris son essor avec l'émergence des méthodes numériques. On note actuellement un intérêt particulièrement marqué pour les méthodes d'éléments finis dans ce domaine. Avec les outils informatiques qui ne cessent de gagner en puissance, on opte de plus en plus pour la simulation numérique en mécanique des fluides. Cet outil est devenu indispensable et complète bien les méthodes expérimentales et analytiques.

Les méthodes adaptatives ont ajouté plus récemment de la robustesse aux méthodes numériques. Elles permettent l'obtention de solutions numériques précises par

l'optimisation des ressources et un certain contrôle de la qualité ou de la précision de cette solution.

Ce mémoire propose donc d'étendre au cas axisymétrique une méthodologie adaptative pour écoulements incompressibles turbulents développée par Ilinca [1].

La structure du mémoire est la suivante. Au chapitre 1, on fait un survol bibliographique du champ d'intérêt particulier visé tout en positionnant la contribution du présent travail dans cette sphère de la mécanique des fluides assistée par ordinateurs. Au chapitre 2, on présente les aspects mathématiques de la modélisation du problème et de la méthode de résolution par éléments finis. On insiste sur la représentation dans le cas axisymétrique. Au chapitre 3, on traite du processus de remaillage adaptatif. On y présente la technique d'estimation d'erreur utilisée et l'opérateur de transition gouvernant ce processus itératif d'adaptation. Au chapitre 4, on présente quelques cas test permettant de vérifier le bon fonctionnement du résolveur et de l'estimateur d'erreur. On utilise pour cela des problèmes possédant une solution analytique connue. Au chapitre 5, on présente des applications résolues avec la méthode présentée et pour lesquelles on possède des mesures expérimentales. On jette alors un regard critique sur le modèle mathématique utilisé et on procède aussi à des études au niveau de l'influence des différentes formulations stabilisées utilisées. Le tout se termine par une conclusion.

Chapitre 1

Considérations générales et brève revue bibliographique

Depuis plusieurs années les méthodes numériques sont largement utilisées dans divers domaines d'intérêt pratique dont la mécanique des fluides. On traite maintenant des problèmes de complexité croissante. Plus récemment, les méthodes adaptatives ont émergé dans le but d'accroître la précision des résultats.

L'objet de ce mémoire est d'étendre au cas axisymétrique la méthodologie adaptative développée en 2-D par Ilinca [1] pour résoudre les écoulements turbulents par une méthode d'éléments finis.

Ce chapitre dresse un bref aperçu des aspects de modélisation, de résolution, d'estimation d'erreur et de remaillage adaptatif, ainsi que la position de ce mémoire dans le tableau général. Les détails théoriques seront repris ultérieurement.

1.1 Modélisation et résolution

La physique qui sous-tend le cas étudié est celle des écoulements de fluides incompressibles visqueux et turbulents. La modélisation mathématique de ces problèmes, dans sa forme la plus générale, est représentée par les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles en régime transitoire. Plusieurs ouvrages traitent de ces équations, par exemple ceux de Panton [2] et Currie [3]. Cependant, la résolution numérique précise de ces équations demeure impossible, même avec les puissants outils informatiques modernes. On a donc recours à des modèles simplifiés: ce sont les modèles de turbulence.

Une approche courante consiste à décomposer les variables dépendantes en une composante moyenne et une fluctuation et à prendre la moyenne temporelle des équations de Navier-Stokes. On aboutit alors aux équations de Reynolds qui régissent l'écoulement moyen [4, 5]. Ce processus de moyenne génère des équations similaires aux équations de Navier-Stokes mais comportant des inconnues supplémentaires contenues dans ce qu'on appelle le tenseur de Reynolds. Il faut modéliser ces termes pour fermer le système. À cette fin on utilise l'approximation de Boussinesq [6] qui introduit la viscosité turbulente, une propriété de l'écoulement que l'on doit modéliser. On utilise ici un modèle $k - \epsilon$ [7]. Ce modèle à deux équations est d'usage répandu et a été utilisé avec succès par Ilinca [1].

Ce modèle dit à haut nombre de Reynolds n'est pas valide près des parois solides car il néglige l'amortissement de la turbulence due à la proximité des parois. On utilise une loi de paroi pour faire le pont entre l'écoulement gouverné par le modèle $k - \epsilon$ et les parois solides [7]. Cette loi de paroi est basée sur des observations

expérimentales et décrit le comportement de l'écoulement près d'une frontière solide. Il existe plusieurs de ces lois de parois. Dans le cas présent, on utilise une loi de paroi à deux échelles de vitesse [8, 9].

L'utilisation de k et ϵ comme variables dépendantes conduit à des difficultés numériques. Alors que k et ϵ sont des quantités positives, leur discrétisation ne le demeure pas toujours. On adopte ici la formulation dite en variables logarithmiques développée par Ilinca [1, 10]. Cette façon de faire présente de nombreux avantages. Elle préserve la positivité des variables de turbulence, elle permet une résolution plus facile sur des maillages grossiers, elle donne une meilleure prédiction de la viscosité turbulente et elle présente un excellent comportement dans les zones d'eau morte (turbulence faible).

Pour résoudre ces équations, on utilise une méthode d'éléments finis. Cette technique générale de résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles trouve de nombreuses applications dans divers champs d'activité dont la mécanique des fluides et plus particulièrement pour les équations de Navier-Stokes. Notons comme livres de référence sur la méthode des éléments finis les ouvrages de Reddy [11] et de Szabó et Babuška [12], ou plus spécifiquement pour les équations de Navier-Stokes celui de Cuvelier et al. [13]. Il faut aussi mentionner qu'on utilise des maillages non-structurés qui sont indispensables aux méthodes adaptatives et qui sont très bien supportés par les méthodes d'éléments finis.

Bien que plusieurs éléments aient été implantés, tous les calculs présentés dans ce mémoire ont été réalisés avec l'élément de Crouzeix-Raviart [13] et des interpolants quadratiques pour k et ϵ . Avec cet élément on utilise, pour la résolution du mouvement, une condensation de la bulle ainsi qu'une méthode de lagrangien augmenté

pour traiter la contrainte d'incompressibilité et le calcul de la pression [1, 14, 15].

Enfin, on mentionne l'utilisation de techniques de stabilisation pour les écoulements dominés par la convection. Une des premières approches en éléments finis, notée ici SU (*Streamline Upwind*), provient de Hughes et Brooks [16]. D'autres techniques ont ensuite été développées, telles SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) [17, 18] et GLS (Galerkin moindres carrés) [19], dont il existe de nombreuses variantes. On n'a retenu ici que celles utilisées par Ilinca [1] et qui sont décrites au chapitre 2.

1.2 Adaptativité

Le maillage joue un rôle central et critique lors de la résolution numérique d'un problème. En effet, la précision et la qualité de la solution dépendent largement du maillage utilisé. Évidemment, plus le maillage est fin, meilleurs devraient être les résultats. Mais les ressources informatiques étant limitées, il faut optimiser au maximum la distribution des noeuds et des éléments. Il ne suffit pas de raffiner partout, il faut concentrer les éléments là où ils sont vraiment nécessaires, tout en utilisant de gros éléments là où la solution varie peu. La discrétisation doit donc être adaptée au cas à résoudre.

Le processus de remaillage adaptatif, illustré à la figure 1.1, permet d'obtenir automatiquement de tels maillages. Il s'agit de faire plusieurs résolutions successives avec, entre chacune, une estimation d'erreur qui permet de générer, par le biais d'un opérateur de transition, un nouveau maillage mieux adapté à la physique du

problème à résoudre. Hétu présente deux opérateurs de transition en détails [20].

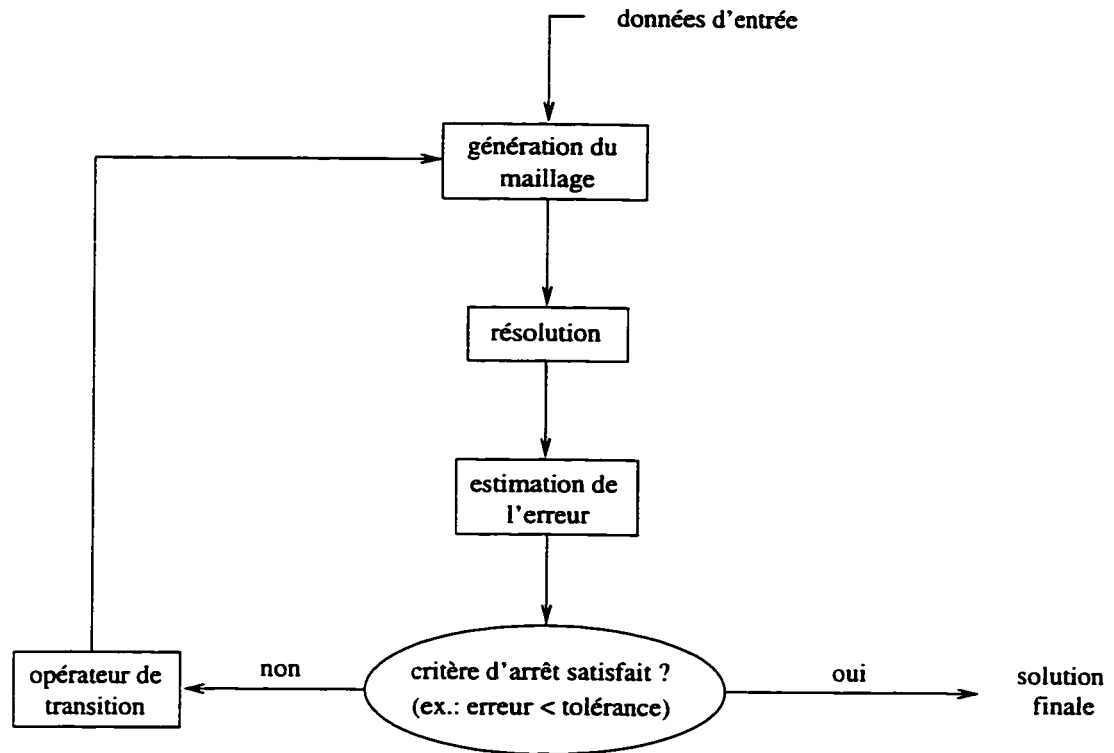


Figure 1.1: Processus de remaillage adaptatif

C'est le principe d'équirépartition de l'erreur qui conduit à la construction d'un maillage *optimal*. Un tel maillage garantit une précision maximale à ressources données. On y arrive en créant de petits éléments là où l'erreur est grande et de gros éléments là où la solution est déjà suffisamment précise. Le processus débute avec un maillage grossier pour progressivement générer des maillages de plus en plus fins. En plus de répartir les noeuds de façon adéquate, on augmente leur nombre d'un cycle à l'autre. En effectuant un assez grand nombre de cycles, on donne le temps au maillage de bien s'ajuster et de se stabiliser.

En augmentant progressivement le nombre de noeuds, le processus n'en de-

vient pas pour autant excessivement coûteux bien qu'on doive procéder à plusieurs résolutions. En effet, les premières résolutions sont rapides (vu le faible nombre d'inconnues) et les dernières se trouvent à être moins longues à résoudre car la solution du cycle précédent constitue un excellent estimé initial. C'est donc moins coûteux que si l'on débutait directement sur ces maillages à partir d'une solution initiale nulle.

L'analyse d'erreur permet aussi une certaine évaluation de la précision numérique de la solution. Tout ce processus est "automatique" et requiert donc très peu d'intervention de la part de l'utilisateur. Générer "manuellement" des maillages aussi bien adaptés à la solution serait presque impossible et beaucoup plus long.

Il existe plusieurs méthodes pour estimer l'erreur. Dans ce travail on utilise une des méthodes appartenant à la famille des projections, soit la projection locale telle que proposée par Zienkiewicz et Zhu [21]. L'idée générale des méthodes de projection consiste à construire, à partir de quantités de la solution numérique qui sont discontinues et typiquement linéaires dans ce cas-ci (par exemple les dérivées de la vitesse ou des variables de turbulence), une nouvelle distribution qui devrait être plus près de la solution exacte. On tente donc de reproduire une distribution enrichie, par exemple une forme polynômiale du deuxième degré définie par morceaux, qui soit continue (car la solution exacte l'est). La projection locale utilisée procède à des projections au sens des moindres carrés, sur une forme intégrale, sur de petits regroupements d'éléments.

Notons cependant que cette stratégie ne génère pas d'éléments avec de l'étirement, ce qui peut être fait lorsqu'on fait soi-même son maillage structuré par exemple. L'étirement peut, dans certains cas, être très utile, voire même essentiel.

1.3 Contribution scientifique

La première contribution du présent mémoire ne se situe pas au niveau du développement de nouvelles méthodes, mais consiste plutôt en une extension au cas axisymétrique des méthodes de pointe développées par Ilinca [1] pour les écoulements plans. Le choix des différentes techniques ou formulations utilisées dans le présent travail est principalement basé sur ceux faits par Ilinca. La deuxième contribution consiste en une analyse de la performance de l'estimateur d'erreur sur des écoulements possédant une solution analytique. Cette analyse permet de soulever une lacune de la méthode utilisée qui ne détecte pas les erreurs dues au décalage de la solution, c'est-à-dire les erreurs dues au mauvais niveau de la solution sur de grandes surfaces. La troisième contribution consiste en une analyse détaillée de l'effet de l'adaptativité sur les différents schémas de discrétisation pour une famille de diffuseurs à angles variés. On y observe la sensibilité de la solution à la formulation utilisée sur des maillages grossiers et la convergence globale que permet l'adaptativité.

Chapitre 2

Modélisation et méthode de résolution

Dans ce chapitre, on examine plus en détails la modélisation mathématique du problème, la formulation variationnelle utilisée par la méthode des éléments finis, les conditions aux frontières pour des parois solides, la résolution en variables dites logarithmiques et les méthodes de stabilisation pour les écoulements dominés par la convection. On insiste sur l'application au cas axisymétrique.

2.1 Équations moyennes

À la base, les équations qui modélisent le comportement des fluides incompressibles visqueux turbulents sont les équations de Navier-Stokes en régime transitoire. Pour un fluide incompressible (masse volumique constante), ces équations prennent

la forme:

- équation de continuité:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.1)$$

- équation de mouvement:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (2.2)$$

où \mathbf{U} est le vecteur vitesse, ρ est la masse volumique, P est la pression, \mathbf{f} est une force massique et $\boldsymbol{\tau}$ représente le tenseur des contraintes visqueuses:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) \quad (2.3)$$

où μ est la viscosité dynamique.

Afin de simplifier la modélisation d'un écoulement turbulent à moyenne stationnaire, on décompose la vitesse et la pression en la somme d'une valeur moyenne et d'une fluctuation:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{u} + \mathbf{u}' \\ P &= p + p' \end{aligned} \quad (2.4)$$

où, par exemple pour la vitesse, \mathbf{U} est la vitesse instantanée, \mathbf{u} est la vitesse moyenne et \mathbf{u}' est la fluctuation autour de la valeur moyenne. Par vitesse moyenne on entend la moyenne dans le temps, à une position donnée:

$$\mathbf{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{U} dt \quad (2.5)$$

On obtient les équations moyennes de Reynolds en insérant cette décomposition dans les équations de Navier-Stokes (2.1) et (2.2) et en appliquant l'opération de moyenne aux équations:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla \cdot \mathbf{R} + \rho \mathbf{f} \quad (2.7)$$

Ici, \mathbf{R} est le tenseur de Reynolds, donné par:

$$R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (2.8)$$

Note: on utilise le trait supérieur pour désigner l'opérateur de moyenne.

Les équations moyennes de Reynolds ont donc la même forme que les équations de Navier-Stokes en régime stationnaire, avec un terme supplémentaire $\nabla \cdot \mathbf{R}$. Les inconnues sont les quantités moyennes et non les quantités instantanées. \mathbf{R} étant inconnu, il faut donc le modéliser pour fermer le système.

2.2 Modèle de turbulence $k - \epsilon$

On utilise l'approximation de Boussinesq [6] pour modéliser le tenseur de Reynolds. Celle-ci donne au tenseur de Reynolds la même forme que celle du tenseur des contraintes visqueuses:

$$R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_T \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.9)$$

On introduit ici une nouvelle quantité: la viscosité turbulente μ_T qui n'est pas une propriété du fluide mais plutôt une caractéristique de l'écoulement. Le terme $\frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$ est présent pour s'assurer de préserver la définition de l'énergie cinétique de la turbulence k , soit:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (2.10)$$

Dans le cas axisymétrique, on utilise le système de coordonnées (x, r, θ) où x est dans la direction axiale, r est dans la direction radiale et θ est dans la direction tangentielle. Les composantes du vecteur vitesse associées à ces directions sont respectivement u , v et w . Dans le cas présent, on considère uniquement le cas sans tourbillon, c'est-à-dire qu'on suppose que $w = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

De plus, le terme $\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$ est inclus dans la pression, de sorte que l'équation de mouvement devient:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot [(\mu + \mu_T)(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \rho \mathbf{f} \quad (2.11)$$

Les équations de Reynolds dans le cas axisymétrique s'écrivent finalement sous la forme:

- continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (2.12)$$

- mouvement axial:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \rho f_x \quad (2.13)$$

- mouvement radial:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2r(\mu + \mu_T) \frac{\partial v}{\partial r} \right] \\ & - 2(\mu + \mu_T) \frac{v}{r^2} + \rho f_r \end{aligned} \quad (2.14)$$

On retrouve à l'annexe A plus de détails concernant les opérateurs différentiels dans un repère cylindrique.

Il reste alors à déterminer μ_T que l'on obtient grâce au modèle $k-\epsilon$ de Launder et Spalding [7]. On calcule la viscosité turbulente à l'aide de la relation de Kolmogorov-Prandtl:

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.15)$$

où C_μ est une constante et ϵ est le taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence défini par:

$$\epsilon = \nu \overline{\nabla \mathbf{u}' : (\nabla \mathbf{u}')^T} \quad (2.16)$$

Deux nouvelles équations aux dérivées partielles s'ajoutent pour assurer la fermeture mathématique de ce système qui compte maintenant deux inconnues supplémentaires, k et ϵ .

- équation de k :

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho \epsilon \quad (2.17)$$

- équation de ϵ :

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_T P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.18)$$

où:

$$P(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2.19)$$

Les constantes utilisées sont données au tableau 2.1. Elles correspondent aux valeurs suggérées par Launder et Spalding [7], bien que celles-ci soient plutôt conseillées pour le cas bidimensionnel plan.

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ
0,09	1,44	1,92	1,0	1,3

Tableau 2.1: Constantes pour le modèle $k - \epsilon$

L'algorithme de résolution utilisé est alors le suivant:

1. Fournir des valeurs initiales à u , v , k et ϵ .
2. Évaluer la valeur initiale de μ_T .
3. Résoudre.
 - 3.1 Résoudre les équations de mouvement et de continuité
(pour un μ_T donné).
 - 3.2 Résoudre les équations de k et ϵ (pour un μ_T et un u donnés).
 - 3.2.1 Résoudre l'équation de k .
 - 3.2.2 Résoudre l'équation de ϵ .
 - 3.2.3 Calculer la nouvelle valeur de μ_T .
 - 3.2.4 Selon un critère d'arrêt, poursuivre les sous-itérations (aller à l'étape 3.2) ou continuer à 3.3.
 - 3.3 Si la solution ne satisfait pas les conditions de convergence, procéder à une nouvelle itération globale (aller à l'étape 3), sinon arrêter.

On découple donc la résolution du mouvement de celle des équations de transport de k et de ϵ . Le fait d'ajouter des sous-itérations dans la résolution des variables de turbulence réduit habituellement le temps total de calcul pour une résolution complète.

On réécrit les équation de k et ϵ sous-forme bloc-triangulaire afin d'augmenter

la robustesse de l'algorithme de résolution. On utilise simplement l'équation (2.15) pour obtenir:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_T} \quad (2.20)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + \rho C_1 C_\mu k P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.21)$$

Dans le cas axisymétrique, ces équations prennent la forme:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] \\ &\quad + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_T} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right] \\ &\quad + \rho C_1 C_\mu k P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec:

$$P(\mathbf{u}) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \quad (2.24)$$

2.3 Formulation variationnelle: résolution par la méthode des éléments finis

Ce système d'équations aux dérivées partielles est résolu à l'aide d'une méthode d'éléments finis. Pour définir la formulation variationnelle (forme faible) associée aux équations, on les multiplie par une fonction test et on intègre sur le domaine de calcul Ω . On procède ensuite à une intégration par parties des termes de diffusion

et de pression. On obtient ainsi les formes faibles suivantes pour les équations de continuité et de mouvement:

$$\int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \\ \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.26)$$

où δp est la fonction test en pression et $\delta \mathbf{u}$ est la fonction test en vitesse. Le tenseur du taux de déformation $\dot{\gamma}$ et les tractions $\hat{\mathbf{t}}$ sur les frontières sont donnés par:

$$\dot{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2.27)$$

$$\hat{\mathbf{t}} = 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} - p \hat{\mathbf{n}} \quad (2.28)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire normal à la frontière.

Les frontières $\partial\Omega$ sont subdivisées en deux régions: on impose des conditions essentielles sur Γ_u et des conditions naturelles sur Γ_i , soit:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (2.29)$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}_0 \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (2.30)$$

avec:

$$\Gamma_u \cup \Gamma_i = \partial\Omega \quad (2.31)$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_i = \emptyset \quad (2.32)$$

Les équations (2.25) et (2.26) sont valides pour toute fonction test contenue dans ce qu'on appelle les espaces de fonctions admissibles. On définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable et le premier espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ par:

$$L^2(\Omega) = \left\{ u \mid \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (2.33)$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\} \quad (2.34)$$

Dans le cas présent, les fonctions test doivent appartenir aux espaces suivants:

$$\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^n \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u \right\} \quad (2.35)$$

$$\delta p \in \mathcal{Q} = L^2(\Omega) \quad (2.36)$$

La solution doit aussi satisfaire certaines conditions de régularité qui se traduisent par le fait qu'elle doit être contenue dans les espaces suivants:

$$\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^n \quad (2.37)$$

$$p \in L^2(\Omega) \quad (2.38)$$

L'écriture de la forme faible sous forme scalaire pour le cas axisymétrique est alors:

- continuité:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \delta p \, d\Omega = 0 \quad (2.39)$$

- mouvement axial:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) \delta u \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mu + \mu_T) \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial r} \right] d\Omega \\ - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta u}{\partial x} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho f_x \delta u \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{t}_x \delta u \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.40)$$

- mouvement radial:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) \delta v \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mu + \mu_T) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial \delta v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r^2} \delta v \right] d\Omega \\ - \int_{\Omega} p \left(\frac{\partial \delta v}{\partial r} + \frac{\delta v}{r} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \rho f_r \delta v \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{t}_r \delta v \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.41)$$

où:

$$d\Omega = r \, dr \, dx \quad (2.42)$$

$$d\Gamma = r \, ds \quad (2.43)$$

Finalement, la méthode d'éléments finis de type Galerkin consiste à discrétiser la forme faible en prenant comme fonctions test les fonctions d'interpolation de la solution. Dans le cas présent, on utilise l'élément de Crouzeix-Raviart $P_2^+ - P_1$ qui est quadratique en vitesse (enrichi d'une bulle) et linéaire discontinu en pression.

$$\begin{aligned} u_h &= \sum_{i=1}^{N_u} N_i^u u_i & v_h &= \sum_{i=1}^{N_v} N_i^v v_i & p_h &= \sum_{i=1}^{N_p} N_i^p p_i \\ \delta u_i &= N_i^u & \delta v_i &= N_i^v & \delta p_i &= N_i^p \end{aligned} \quad (2.44)$$

où, par exemple pour u , u_h est la solution éléments finis, N_u le nombre de noeuds, N_i^u sont les fonctions d'interpolation, u_i sont les valeurs nodales et δu_i sont les fonctions test.

On procède de la même façon pour les équations de k et ϵ . Cette fois-ci la solution (k et ϵ) est contenue dans $H^1(\Omega)$ et on utilise des interpolants quadratiques. Il n'y a pas d'interpolant explicite pour μ_T . En dénotant par w les fonctions test pour k et ϵ , on a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k w + \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \cdot \nabla w + \rho^2 C_{\mu} \frac{k^2}{\mu_T} w \right) d\Omega = \\ \int_{\Omega} \mu_T P(\mathbf{u}) w \, d\Omega + \int_{\Gamma_{i_k}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial n} w \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon w + \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \epsilon \cdot \nabla w + \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} w \right) d\Omega = \\ \int_{\Omega} \rho C_1 C_{\mu} k P(\mathbf{u}) w \, d\Omega + \int_{\Gamma_{i_{\epsilon}}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial n} w \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.46)$$

où Γ_{i_k} est la portion de la frontière $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Neumann sur k et Γ_{i_ϵ} la portion où l'on impose des conditions de Neumann sur ϵ .

2.4 Conditions aux frontières pour les parois solides

Le modèle de turbulence $k - \epsilon$ utilisé ici n'est pas valide pour de faibles nombres de Reynolds de turbulence $Re_T = \frac{\rho V L}{\mu_T}$. En particulier, il ne s'applique pas près des parois solides où la viscosité moléculaire joue un rôle prépondérant. Une possibilité consiste à modifier le modèle présenté afin d'intégrer le modèle jusqu'aux parois. Cette approche est coûteuse puisqu'elle nécessite un très grand nombre de noeuds près de la frontière solide pour bien capturer les variations très rapides de \mathbf{u} , k et ϵ . Cette approche a donc été rejetée.

On opte plutôt pour la stratégie qui consiste à utiliser une *loi de paroi*. Le principe est le suivant: on modifie le domaine de calcul en déplaçant la frontière solide réelle d'une petite quantité d vers l'intérieur du domaine. Dans cet espace libre entre la frontière physique et la frontière fictive de calcul, on prolonge la solution numérique jusqu'à la paroi en utilisant des fonctions qui décrivent le comportement des variables près de la paroi. Il faut maintenant déterminer les conditions aux frontières à imposer sur ce nouveau domaine de calcul.

2.4.1 Loi de paroi

Une loi de paroi classique est celle présentée par Launder et Spalding [7]. Elle décrit le profil de vitesse près d'une paroi solide de façon adimensionnelle: une vitesse adimensionnelle u^+ tangente à la paroi en fonction de y^+ , la distance adimensionnelle à la paroi:

$$y^+ = \frac{\rho y u_\tau}{\mu} \quad (2.47)$$

$$u^+ = \frac{u_t}{u_\tau} \quad (2.48)$$

où y est la distance normale à la paroi, u_t est la composante tangentielle de la vitesse (c'est-à-dire la composante de la vitesse dans la direction de la paroi) et u_τ est appelée la vitesse de frottement, liée au cisaillement à la paroi τ_w :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.49)$$

Cette loi de paroi distingue deux zones: la sous-couche laminaire ($y^+ < y_c^+$) où la viscosité moléculaire est dominante et la zone logarithmique:

$$\begin{aligned} u^+ &= y^+ & \text{si } y^+ < y_c^+ \\ u^+ &= \frac{1}{K} \ln(Ey^+) & \text{si } y^+ \geq y_c^+ \end{aligned} \quad (2.50)$$

où K est la constante de Kármán et E est un paramètre de rugosité. On prend $K = 0,42$ et $E = 9,0$ (pour une paroi lisse). La limite entre les deux zones, y_c^+ , est pour sa part obtenue par l'intersection des profils de vitesse des deux zones de façon à assurer la continuité de la vitesse:

$$y_c^+ = \frac{1}{K} \ln(Ey_c^+) \quad (2.51)$$

De même, les distributions de k et ϵ sont données par:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (2.52)$$

$$\epsilon = \frac{u_\tau^3}{Ky} \quad (2.53)$$

Ces dernières équations pour k et ϵ ne sont valides que dans la zone logarithmique. Elles sont obtenues en supposant qu'il y a équilibre entre la production et la dissipation turbulente. Cette approximation est assez bonne si l'écoulement est proche de l'équilibre et si les gradients de pression sont faibles.

L'utilisation exclusive de u_τ comme échelle de vitesse dans la couche limite ne donne pas toujours de bons résultats, en particulier dans les problèmes de transfert de chaleur. Près d'un point de recollement, les vitesses moyennes sont très faibles ce qui se traduit par de petites valeurs du cisaillement et de u_τ . L'utilisation de la vitesse de frottement comme échelle dans la loi de paroi thermique conduit à des flux de chaleur nuls aux points de stagnation [8], ce qui va à l'encontre des observations expérimentales. En effet, il y a dans cette zone des fluctuations de vitesse très importantes qui favorisent le transfert thermique.

La référence [8] propose une deuxième échelle de vitesse u_* liée aux fluctuations turbulentes:

$$u_* = C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \quad (2.54)$$

où k_p est l'énergie cinétique de la turbulence évaluée à la frontière de calcul.

Cette deuxième échelle est non seulement utilisée pour le flux de chaleur mais aussi pour la vitesse et les variables de turbulence. Ce modèle de loi de paroi dit à deux échelles de vitesse [8] utilise les mêmes définitions de profil de vitesse selon deux zones (équation (2.50)), mais avec les adimensionnalisations suivantes:

$$y^+ = \frac{\rho y u_*}{\mu} \quad (2.55)$$

$$u^+ = \frac{u_t}{u_\tau} \quad (2.56)$$

Enfin, la valeur absolue du cisaillement à la paroi τ_w (ou le cisaillement à la frontière du domaine de calcul) est donnée par:

$$\tau_w = \rho u_\tau u_* \quad (2.57)$$

En tenant compte de la stratégie de résolution adoptée (ordre de résolution et découplage des équations), on procède de la façon suivante:

1. Résoudre l'équation de k en utilisant comme condition aux frontières $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$.
2. Évaluer u_* selon (2.54) en utilisant les valeurs de k_p obtenues de l'étape 1.
3. Résoudre l'équation de ϵ en utilisant les conditions de Dirichlet:

$$\epsilon_p = \frac{u_*^3}{Kd} \quad (2.58)$$

4. Évaluer y^+ selon (2.55) en prenant $y = d$.
5. Évaluer u^+ selon (2.50).
6. Résoudre les équations de continuité et de mouvement en utilisant:

$$\tau_w = \rho u_\tau u_* = \frac{\rho u_*}{u^+} u_t \quad (2.59)$$

L'étape 6 est une relation linéaire entre la vitesse u_t et le cisaillement à la frontière τ_w . Cette relation sert de condition aux limites de type mixte pour la résolution des équations de continuité et de mouvement. La direction du cisaillement est celle de la paroi et son sens est opposé à celui de la vitesse. La deuxième condition aux frontières sur la paroi consiste à imposer une vitesse normale nulle (condition de tangence ou d'imperméabilité).

Les calculs présentés au chapitre 5 utilisent cette loi de paroi à deux échelles de vitesse.

2.4.2 Implantation de la loi de paroi

On vient de voir que pour la résolution des équations de Reynolds on impose une relation mixte entre la vitesse et le cisaillement (équation (2.59)) et une condition de tangence le long des parois. Il faut maintenant voir comment implanter ces conditions dans le cadre d'une résolution par éléments finis.

L'intégration par parties des termes de pression et de diffusion dans les équations de mouvement fait apparaître des termes de bord qui constituent les conditions naturelles et qui correspondent aux forces agissant sur la frontière. En désignant par $\boldsymbol{\tau}^*$ le tenseur des contraintes (regroupant toutes les sources de contraintes), par $\delta \mathbf{u}$ les fonctions test en vitesse et par $\hat{\mathbf{n}}$ le vecteur unitaire normal d'un côté d'élément sur la frontière, on a le terme de bord suivant dans les équations de mouvement:

$$\int_{\Gamma} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}^*) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (2.60)$$

ou, en dénotant par \mathbf{T} le terme $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}^*$:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (2.61)$$

Ici, \mathbf{T} correspond à ce qu'on avait appelé les tractions $\hat{\mathbf{t}}$ sur les frontières à la section 2.3. Il représente le vecteur des forces (par unité de surface de la face) agissant en un point sur un segment frontière de normale $\hat{\mathbf{n}}$. La figure 2.1 illustre un segment typique avec ce vecteur et ses composantes selon les repères (x, r) et (n, t) (directions normale et tangentielle). On utilise les indices x et r pour désigner les

composantes dans le repère (x, r) et les indices n et t pour désigner les composantes dans le repère (n, t) .

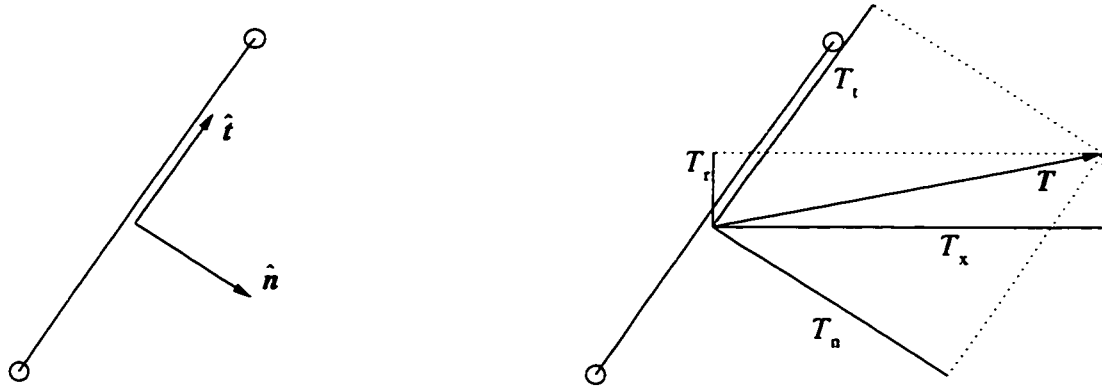


Figure 2.1: Contraintes sur un segment frontière

Note: $\hat{n} = (n_x, n_r)$ est le vecteur unitaire normal (pointant vers l'extérieur du domaine) et $\hat{t} = (t_x, t_r)$ est le vecteur unitaire tangent, orienté de telle sorte que:

$$t_x = -n_r \quad \text{et} \quad t_r = n_x \quad (2.62)$$

On peut donc écrire le terme de bord de la façon suivante:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} (T_x \delta u + T_r \delta v) \, d\Gamma \quad (2.63)$$

dont les composantes axiale et radiale dans les équations de mouvement sont:

- mouvement axial:

$$\int_{\Gamma} T_x \delta u \, d\Gamma \quad (2.64)$$

- mouvement radial:

$$\int_{\Gamma} T_r \delta v \, d\Gamma \quad (2.65)$$

Les conditions aux frontières qui s'appliquent de façon naturelle sur ce problème sont des conditions de Dirichlet sur u ou v ou des conditions de Neumann sur T_x ou T_r . Mais avec les lois de paroi, on n'a pas cette information directement. On a plutôt une relation mixte et surtout on a de l'information suivant le repère normal-tangentiel. On doit donc exprimer ces termes de bords en fonction de T_n et T_t plutôt que T_x et T_r . La transformation établissant ce lien est:

$$T_x = T_t t_x + T_n t_r \quad (2.66)$$

$$T_r = T_t t_r - T_n t_x \quad (2.67)$$

On retrouve alors les termes de bord suivants:

- mouvement axial:

$$\int_{\Gamma} T_t t_x \delta u \, d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n t_r \delta u \, d\Gamma \quad (2.68)$$

- mouvement radial:

$$\int_{\Gamma} T_t t_r \delta v \, d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n t_x \delta v \, d\Gamma \quad (2.69)$$

On doit maintenant déterminer T_n et T_t (au lieu de T_x et T_r) qui se retrouveront ensuite dans les deux équations de mouvement (2.68) et (2.69). T_n sera traité à la section suivante par la condition de tangence, alors que T_t correspond en fait au cisaillement à la paroi.

On a déjà vu que la grandeur du cisaillement à la paroi est donnée par (on considèrerait alors la valeur absolue de u_t):

$$\tau_w = \rho u_r u_* = \frac{\rho u_*}{u^+} u_t = G u_t \quad (2.70)$$

où G est connu au moment où l'on procède à la résolution du bloc continuité-mouvement (il est indépendant de la vitesse). Si l'on tient compte du fait que le

sens de ce cisaillement est opposé à celui de la vitesse et tangent à la paroi, on a:

$$T_t = -Gu_t = -G(ut_x + vt_r) \quad (2.71)$$

Les portions d'intégrales de bord contenant T_t (dans les équations (2.68) et (2.69)) deviennent alors:

- mouvement axial:

$$\int_{\Gamma} T_t t_x \delta u \, d\Gamma = - \int_{\Gamma} G(ut_x + vt_r) t_x \delta u \, d\Gamma \quad (2.72)$$

- mouvement radial:

$$\int_{\Gamma} T_t t_r \delta v \, d\Gamma = - \int_{\Gamma} G(ut_x + vt_r) t_r \delta v \, d\Gamma \quad (2.73)$$

Le résultat net est une transformation de la partie de la condition naturelle contenant T_t en un terme linéaire sur les inconnues primaires u et v . Ce terme s'ajoute au membre de gauche. Cette transformation n'est évidemment effectuée que sur la portion de la frontière où l'on impose la loi de paroi.

2.4.3 Implantation de la condition de tangence

La condition de tangence consiste à imposer que la vitesse est dans la direction de la paroi et donc que la vitesse normale est nulle:

$$u_n = un_x + vn_r = 0 \quad (2.74)$$

Le choix pour le présent travail est d'imposer cette condition de tangence dans un sens faible tel que proposé par Ilinca [1]. Cette condition est formulée comme

une contrainte à respecter. On peut donc introduire un multiplicateur de Lagrange f associé à cette contrainte et modifier les équations de mouvement en ajoutant un terme issu de la première variation de la fonctionnelle suivante:

$$I = \int_{\Gamma} f (un_x + vn_r) d\Gamma \quad (2.75)$$

soit:

$$\int_{\Gamma} (fn_x \delta u + fn_r \delta v) d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta f (un_x + vn_r) d\Gamma \quad (2.76)$$

En prenant les composantes, on obtient une équation supplémentaire pour la contrainte de tangence et des termes supplémentaires dans les équations de mouvement:

- équation supplémentaire:

$$\int_{\Gamma} \delta f (un_x + vn_r) d\Gamma = 0 \quad (2.77)$$

- terme supplémentaire dans l'équation de mouvement axial:

$$\int_{\Gamma} fn_x \delta u d\Gamma \quad (2.78)$$

- terme supplémentaire dans l'équation de mouvement radial:

$$\int_{\Gamma} fn_r \delta v d\Gamma \quad (2.79)$$

En regroupant ces termes supplémentaires avec les termes de contrainte normale T_n des équations (2.68) et (2.69) et en les incorporant au membre de gauche des équations, on a:

- dans l'équation de mouvement axial:

$$\int_{\Gamma} (fn_x - T_n t_r) \delta u d\Gamma = \int_{\Gamma} (f - T_n) n_x \delta u d\Gamma \quad (2.80)$$

- dans l'équation de mouvement radial:

$$\int_{\Gamma} (fn_y + T_n t_x) \delta v \, d\Gamma = \int_{\Gamma} (f - T_n) n_r \delta v \, d\Gamma \quad (2.81)$$

Le multiplicateur de Lagrange f représente en fait une réaction à la paroi (contrainte normale) qui s'ajuste de façon à satisfaire la condition de vitesse normale nulle. On incorpore T_n à f ou, vu autrement, on pose $T_n = 0$ et on laisse f s'ajuster en conséquence. On a donc éliminé les portions d'intégrales de bord contenant l'inconnue T_n . On a par contre des équations (2.77) et des termes supplémentaires (2.78) et (2.79) à ajouter aux équations de mouvement. Ici aussi, on ne procède à ces opérations que sur la portion de la frontière où l'on impose la condition de tangence.

La combinaison loi de paroi et condition de tangence a donc, en définitive, éliminé les intégrales de bord inconnues de la formulation éléments finis pour les transformer en membres de gauche qui dépendent des inconnues primaires. On a ainsi un système consistant à résoudre, avec un nombre adéquat de conditions aux frontières.

Du point de vue de l'implantation, on a utilisé un interpolant constant pour f (soit $\delta f = 1$) qui correspond à un débit net nul à travers chaque face associée aux segments situés sur la frontière solide. La condition de tangence étant imposée dans un sens faible, la contrainte $u_n = 0$ n'est pas respectée de façon ponctuelle. Tout comme pour la pression, on utilise une technique de lagrangien augmenté pour déterminer les inconnues f_i .

Il faut cependant noter que dans le cas où la paroi solide est parfaitement horizontale ou verticale, il suffit d'imposer une condition de Dirichlet nulle sur la variable correspondante ($v = 0$ ou $u = 0$) au lieu de la condition de tangence.

2.5 Résolution en variables logarithmiques

Les variables de turbulence k , ϵ et μ_T sont, par définition, strictement positives. Or le modèle $k - \epsilon$ tel que décrit présente un inconvénient majeur à ce niveau: il n'assure pas la positivité de la solution numérique. Même si la solution exacte au modèle mathématique est strictement positive, la solution numérique peut devenir négative. Ceci peut être très néfaste pour l'algorithme numérique.

L'approche utilisée pour contourner ce problème est la **résolution en variables logarithmiques** telle que présentée par Ilinca [1]. L'idée est la suivante: on procède à un changement de variable $K = \ln(k)$ et $E = \ln(\epsilon)$ et on résoud le système d'équations avec ces variables transformées. Les variables primaires k et ϵ demeurent ainsi toujours positives puisqu'elles sont récupérées en évaluant l'exponentielle de K et E . La viscosité turbulente $\mu_T = \rho C_\mu k^2 / \epsilon$ est donc toujours positive.

Considérons l'équation de l'énergie cinétique de la turbulence pour illustrer cette transformation.

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_T} \quad (2.82)$$

On utilise la transformation:

$$k = e^K \quad (2.83)$$

et donc:

$$\nabla k = \nabla (e^K) = e^K \nabla K \quad (2.84)$$

ce qui donne:

$$\rho \mathbf{u} \cdot (e^K \nabla K) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) e^K \nabla K \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{e^{2K}}{\mu_T} \quad (2.85)$$

Aussi, on a que:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) e^K \nabla K \right] &= \nabla (e^K) \cdot \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K + e^K \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \right] \\ &= e^K \nabla K \cdot \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K + e^K \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \right]\end{aligned}\quad (2.86)$$

En injectant (2.86) dans (2.85) et en divisant les deux côtés de l'équation par e^K on obtient finalement:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \right] + \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla K + \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} \quad (2.87)$$

En procédant façon similaire, l'équation de ϵ devient:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \right] + \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla E + \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) - C_2 \rho e^{E-K} \quad (2.88)$$

L'équation définissant la viscosité turbulente s'exprime alors:

$$\mu_T = \rho C_\mu e^{2K-E} \quad (2.89)$$

Enfin, la formulation variationnelle de ces équations devient:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla K - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} \right] w \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla w \, d\Omega = \int_{\Gamma_{i_k}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial n} w \, d\Gamma\end{aligned}\quad (2.90)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla E - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right] w \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla w \, d\Omega = \int_{\Gamma_{i_\epsilon}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial E}{\partial n} w \, d\Gamma\end{aligned}\quad (2.91)$$

Dans le cas axisymétrique, cette formulation variationnelle est:

- équation de K :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial r} \right) - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left[\left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} w \, d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega} \left(-\mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \right) w \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_{i_k}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial n} w \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.92)$$

- équation de E :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}} \right) \left[\left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} w \, d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega} \left(-\rho C_1 C_{\mu} e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right) w \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_{i_{\epsilon}}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{\partial E}{\partial n} w \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.93)$$

où $P(\mathbf{u})$ est donné par l'équation (2.24).

En plus de préserver la positivité des variables de turbulence, cette méthode de résolution en variables logarithmiques présente de nombreux avantages. Tout d'abord, les variations de K et E sont en général beaucoup moins fortes que celles de k et ϵ et le ratio entre les valeurs extrêmes est beaucoup moins important. La conséquence immédiate est la possibilité d'obtenir des solutions sur des maillages plus grossiers. De plus, la prédiction de μ_T est nettement plus précise, ce qui est très important dans la mesure où la précision de la principale quantité d'intérêt, la vitesse, en dépend beaucoup. Enfin, on obtient une meilleure résolution dans les zones d'eaux mortes où les variables de turbulence prennent de très faibles valeurs.

En contrepartie, ces nouvelles équations contiennent des termes supplémentaires non linéaires qui peuvent constituer des inconvénients d'ordre numérique: des exponentielles et des produits de dérivées premières.

2.6 Méthodes de stabilisation

La méthode d'éléments finis de type Galerkin consiste à prendre comme fonctions test les fonctions d'interpolation de la solution. Or il s'avère que lorsque le terme de convection est important, cette méthode conduit fréquemment à une solution entachée d'oscillations. Ce phénomène se manifeste surtout sur des maillages grossiers et lorsque qu'il y a présence de fronts importants dans la solution. Ce genre de situation est enclin à se produire dans le cas d'écoulements turbulents, où la viscosité peut être très faible de sorte que le terme de convection est dominant. On a donc recours à des méthodes dites de stabilisation pour éliminer ces phénomènes indésirables.

2.6.1 Méthode SU

Une des premières approches fut présentée par Hughes et Brooks [16] et consiste à ajouter de la diffusion artificielle aux équations. Cette approche trouve une analogie avec les méthodes de différences finies: c'est l'équivalent de la différentiation amont. Dans cette méthode, que l'on désigne SU (*Streamline Upwind*), on ajoute plus précisément une diffusion artificielle agissant dans le sens de l'écoulement. Prenons comme exemple une équation de convection-diffusion typique:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + f \quad (2.94)$$

À la diffusion réelle λ , on ajoute un terme donné par le tenseur:

$$\lambda_{ij} = \frac{\tilde{\lambda}}{V^2} u_i u_j \quad (2.95)$$

où:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\delta V h}{2} \quad (2.96)$$

$$\delta = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (2.97)$$

$$Pe = \frac{hV}{2\lambda} \quad (2.98)$$

Dans ces équations, V est le module de la vitesse \mathbf{u} , h est la taille de l'élément et Pe est le nombre de Péclet.

De par sa construction, il est clair que la diffusion ajoutée n'agit que dans le sens de l'écoulement. De plus, dans le contexte d'une formulation variationnelle, le terme de diffusion ajouté peut être transformé en un terme de convection (en intégrant par parties):

$$\int_{\Omega} N \nabla \cdot (\lambda_{ij} \nabla T) d\Omega = \int_{\Omega} N \nabla \cdot \left(\frac{\tilde{\lambda}}{V^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{V^2} \mathbf{u} \cdot \nabla N \right) (\mathbf{u} \cdot \nabla T) d\Omega \quad (2.99)$$

où N est la fonction test de la formulation de Galerkin, soit la fonction d'interpolation.

Ce nouveau terme s'ajoute au terme de convection original et l'effet global est donc une modification de la fonction test appliquée au terme de convection. En notant par N_i les fonctions d'interpolation de la variable dépendante T , la nouvelle fonction test W_i^{SU} pour le terme de convection s'écrit:

$$W_i^{SU} = N_i + \frac{\tilde{\lambda}}{V^2} \mathbf{u} \cdot \nabla N_i = N_i + \tau \mathbf{u} \cdot \nabla N_i \quad (2.100)$$

où:

$$\tau = \frac{\tilde{\lambda}}{V^2} \quad (2.101)$$

Cette méthode n'est cependant pas résiduelle puisque la fonction test n'est pas la même pour tous les termes de l'équation différentielle. Cela peut conduire à de mauvais résultats. Par exemple, la solution numérique peut ne pas être exacte même si cette solution exacte est contenue dans les interpolants utilisés.

2.6.2 Méthode SUPG

Une autre méthode dans la même lignée consiste à modifier la fonction test tel que décrit précédemment pour tous les termes de l'équation [17]. Cette méthode, notée ici SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*), est donc résiduelle. Par contre, l'interprétation ne correspond plus simplement à la notion d'ajout de diffusion artificielle, mais plutôt à un changement dans les fonctions test qui a pour effet de donner plus de poids en amont. Une version intermédiaire à ces deux dernières consiste à modifier la fonction test sur tous les termes sauf ceux de diffusion. On note cette dernière méthode SUPG-incomplet.

À titre d'exemple, la forme faible des équations de mouvement dans la forme SUPG est:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot \left[(\mu + \mu_T) (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right] - \rho \mathbf{f} \right\} \cdot (\tau \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) \, d\Omega^e \\
 & = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Ici, les fonctions test de base $\delta \mathbf{u}$ sont les fonctions d'interpolation. De plus, les termes supplémentaires ajoutés ne sont intégrés que sur l'intérieur des éléments et

non sur les interfaces. Le residu dans ces termes supplémentaires demeure quant à lui sous une forme forte, c'est-à-dire qu'on ne procède pas à une intégration par parties.

2.6.3 Méthode GLS

Une autre méthode de stabilisation reconnue est celle de type Galerkin moindres carrés (notée GLS) [19]. L'approche utilisée est bien différente, mais la formulation résultante a de grandes similarités avec la méthode SUPG.

Soit R une équation différentielle (résidu fort). Avec la méthode de Galerkin, on multiplie cette équation par une fonction test w et on intègre sur le domaine:

$$\int_{\Omega} R w \, d\Omega = 0 \quad (2.103)$$

L'idée de la méthode GLS est d'ajouter à la formulation de Galerkin la première variation d'une fonctionnelle de moindres carrés du résidu fort. On ajoute à (2.103) la première variation de la fonctionnelle suivante:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \tau R^2 \, d\Omega^e \quad (2.104)$$

soit:

$$\delta J = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} R \tau \delta R \, d\Omega^e \quad (2.105)$$

La formulation GLS se résume donc à:

$$\int_{\Omega} R w \, d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} R \tau \delta R \, d\Omega^e = 0 \quad (2.106)$$

Cette méthode est donc résiduelle. Elle a le même effet que la méthode SUPG, soit de modifier la fonction test. Ce terme supplémentaire a pour effet de stabiliser la solution sans trop dégrader sa précision.

Dans le cas des équations de mouvement et de continuité, il faut considérer le système d'équations. En désignant par \mathbf{R}_u le résidu de l'équation de mouvement (un vecteur) et par R_p le résidu de l'équation de continuité, on a:

$$\mathbf{R}_u = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [(\mu + \mu_T) (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] - \rho \mathbf{f} = 0 \quad (2.107)$$

$$R_p = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.108)$$

On doit donc résoudre le problème variationnel suivant:

$$\int_{\Omega} \mathbf{R}_u \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} R_p \delta p \, d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} (\mathbf{R}_u \cdot \tau_u \delta \mathbf{R}_u + R_p \tau_p \delta R_p) \, d\Omega^e = 0 \quad (2.109)$$

avec:

$$\delta \mathbf{R}_u = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta p - \nabla \cdot [(\mu + \mu_T) (\nabla \delta \mathbf{u} + (\nabla \delta \mathbf{u})^T)] \quad (2.110)$$

$$\delta R_p = \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \quad (2.111)$$

Il faut noter que l'on ne considère que la forme linéarisée du terme de convection, excluant ainsi le terme $\rho \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. On a donc:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f} \} \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta p \, d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f} \} \\ & \quad \cdot \tau_u \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u})] \} \, d\Omega^e \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \mathbf{u} \tau_p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega^e = 0 \end{aligned} \quad (2.112)$$

On obtient la forme faible finale pour le mouvement et la continuité en séparant cette dernière équation selon $\delta \mathbf{u}$ et δp et en intégrant par partie **seulement** les termes issus de la formulation de type Galerkin:

- mouvement:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f} \} \\
 & \quad \cdot \tau_u \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u})] \} \, d\Omega^e \\
 & \quad + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \mathbf{u} \, \tau_p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega^e \\
 & = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{2.113}$$

- continuité:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, \delta p \, d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f} \} \\
 & \quad \cdot \tau_u \nabla \delta p \, d\Omega^e = 0
 \end{aligned} \tag{2.114}$$

La formulation GLS ressemble donc à la formulation SUPG, avec l'ajout de termes supplémentaires. De plus, l'équation de continuité entre en jeu cette fois-ci. Il y a même un couplage entre le mouvement et la continuité: le résidu de l'équation de continuité se retrouve dans les équations de mouvement et le résidu fort des équations de mouvement se retrouve dans l'équation de continuité.

Il s'avère en plus que cette technique rend stables des éléments qui sont instables et inutilisables avec la formulation Galerkin (i.e. qui violent la condition de Babuška-Brezzi), par exemple l'élément triangulaire $P_1 - P_1$ linéaire en vitesse et en pression.

Il existe plusieurs variantes à cette formulation, en particulier au niveau du calcul de τ . Un autre exemple: Douglas et Wang [22] ont changé le signe du terme

$\nabla \cdot [2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u})]$. La méthode n'est alors plus réellement issue d'un moindre carré. En fait, pour la présente étude, ce terme sera tout simplement négligé [1].

Pour le calcul de τ_u (de même que pour le calcul de τ dans les méthodes SU, SUPG et SUPG-incomplet) on utilise:

$$\tau_u = \frac{\delta h}{2V} \quad (2.115)$$

avec:

$$\delta = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (2.116)$$

où:

$$Pe = \frac{\rho h V}{2(\mu + \mu_T)} \quad (2.117)$$

Pour τ_p on prend:

$$\tau_p = \frac{h}{2V} \quad (2.118)$$

On retrouve à l'annexe B plus de détails concernant ces diverses méthodes de stabilisation (SU, SUPG-incomplet, SUPG et GLS) pour les équations de Reynolds et les équations de transport de K et E . On y donne aussi la formulation axisymétrique.

Chapitre 3

Estimation d'erreur et remaillage adaptatif

Les deux éléments clés dans un processus de remaillage adaptatif tel que présenté à la figure 1.1 sont l'estimation d'erreur et l'opérateur de transition. L'estimateur d'erreur identifie les régions où le maillage doit être ajusté alors que l'opérateur de transition détermine les caractéristiques locales d'un maillage mieux adapté à la solution (taille, élanement et orientation des mailles). Ces deux aspects font l'objet de ce chapitre.

3.1 Estimation d'erreur

Il existe plusieurs techniques d'estimation d'erreur. On parle ici d'estimation *a posteriori* qui consiste à approcher l'erreur d'une solution numérique donnée, soit la

différence entre la solution numérique et la solution exacte inconnue. L'estimation d'erreur permet de quantifier d'une certaine façon la précision d'une solution numérique. La répartition de l'erreur indique pour sa part les lacunes dans la discrétisation et par conséquent les correctifs à apporter.

3.1.1 Introduction avec un exemple simple

On va d'abord considérer un exemple simple d'équation elliptique, soit un laplacien:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (3.1)$$

La forme faible associée à ce problème est issue de la première variation de la fonctionnelle suivante:

$$J(T) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla T \, d\Omega \quad (3.2)$$

soit:

$$\delta J(T) = \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla \delta T \, d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

Cette notation introduit naturellement une norme associée à la variable dépendante T . C'est la norme énergie de la solution:

$$\|T\|^2 = \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla T \, d\Omega \quad (3.4)$$

Cette norme est aussi utilisée pour quantifier l'erreur. En notant par e^T l'erreur sur T (erreur ponctuelle, par opposition à la norme de l'erreur), on a:

$$e^T = T_{ex} - T_h \quad (3.5)$$

où T_{ex} est la solution exacte et T_h est la solution éléments finis.

La norme énergie de l'erreur est donc:

$$\|e^T\|^2 = \int_{\Omega} \nabla (T_{ex} - T_h) \cdot \nabla (T_{ex} - T_h) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla T_{ex} - \nabla T_h) \cdot (\nabla T_{ex} - \nabla T_h) d\Omega \quad (3.6)$$

Les gradients de la solution éléments finis ∇T_h sont connus alors que les gradients de la solution exacte ∇T_{ex} ne le sont pas. On doit donc estimer les gradients de la solution exacte pour pouvoir estimer les gradients de l'erreur exacte.

Un autre point motive l'utilisation des dérivées comme quantité utilisée dans l'évaluation des normes de l'erreur. On sait que les dérivées de la solution exacte sont continues alors que les dérivées de la solution éléments finis ne le sont pas, peu importe si l'interpolant utilisé est linéaire ou quadratique. On peut donc prévoir qu'un lissage ou une moyenne de ces quantités discontinues donnera une bonne approximation de la solution exacte. Autrement dit, cette discontinuité peut être mise à profit comme outil de détection d'erreur.

Ce choix d'utiliser les dérivées dans la mesure de l'erreur est le plus courant, mais il n'est pas obligatoire. On pourrait très bien utiliser une norme L^2 et travailler directement sur T . On devrait alors tenter de reconstruire une approximation à la solution exacte T_{ex} . On ne pourrait cependant pas se servir de la propriété de discontinuité de la distribution.

3.1.2 Projection globale par moindres carrés

La méthode de projection globale [20, 24, 25] constitue une première approche pour l'estimation d'erreur. L'objectif général est de construire de façon assez simple une approximation des dérivées de la solution exacte qui soit d'ordre supérieur aux dérivées de la solution numérique, soit une distribution polynômiale de degré supérieur. On veut en plus une distribution continue. Cette distribution enrichie continue devrait alors constituer une bonne approximation de la solution exacte et la différence entre la distribution enrichie et la solution éléments finis devrait constituer une bonne approximation de l'erreur exacte.

Une méthode typique pour construire cette forme polynômiale est l'utilisation d'une projection au sens des moindres carrés, soit:

$$\min \int_{\Omega_{proj}} \frac{1}{2} ((\nabla T)^* - \nabla T_h)^2 d\Omega \quad (3.7)$$

où $(\nabla T)^*$ est la projection que l'on cherche à construire et Ω_{proj} est le domaine où s'effectue la projection.

L'approche dite de projection globale consiste à faire une seule projection sur tout le domaine ($\Omega_{proj} = \Omega$). Dans ce cas, on construit une distribution de $(\nabla T)^*$ qui est définie sur les interpolants de la solution T . Par exemple, si les interpolants sont quadratiques, les dérivées de la solution éléments finis sont linéaires et discontinues. On crée un champ $(\nabla T)^*$ quadratique par élément et continu. Cette formulation génère un système matriciel linéaire contenant autant d'inconnues qu'il y a de noeuds dans le maillage (les inconnues sont les valeurs nodales de $(\nabla T)^*$).

Les deux aspects de base dans cette méthode sont de rendre les champs de

dérivées continues et de les enrichir (degré de polynôme plus élevé). La réussite de cette méthode repose cependant sur la discontinuité de ∇T_h . On peut voir en effet que si ∇T_h s'avère être continu, la projection coïncide exactement avec la solution. L'enrichissement polynômial ne peut rien y changer. Ceci est dû au fait que la projection générée est continue, mais pas ses dérivées. L'erreur estimée est alors nulle alors que l'erreur exacte ne l'est pas, ce qui donne un indice d'efficacité nul. On entend par indice d'efficacité Θ le rapport entre la norme de l'erreur estimée et la norme de l'erreur réelle. Un autre désavantage de cette méthode est sa continuelle tendance à sous-estimer l'erreur réelle.

La projection globale s'avère efficace pour des éléments linéaires et mauvaise pour des éléments quadratiques. Ceci suggère l'étude d'une autre technique de projection.

3.1.3 Projection locale

La technique employée dans le présent travail est la méthode de projection locale telle que présentée par Zienkiewicz et Zhu [21]. Le principe de cette méthode est d'effectuer des projections sur des sous-domaines ou groupes d'éléments ($\Omega_{proj} = \Omega_S$). Cette projection est définie à l'aide d'un seul polynôme sur tout le sous-domaine. On peut ainsi générer autour d'un point P une distribution $(\nabla T)^*$ qui soit non seulement continue mais aussi beaucoup plus différentiable que dans le cas de la projection globale. Si ∇T_h s'adonne à être continu, on peut quand même détecter la présence d'erreur en utilisant pour la projection un polynôme de degré plus élevé que la solution ∇T_h .

La figure 3.1 illustre le choix du regroupement d'éléments qui constitue le sous-

domaine Ω_S sur lequel se fait la projection. On considère un noeud P au sommet d'un élément et on construit le sous-domaine avec tous les éléments connectés à ce sommet.

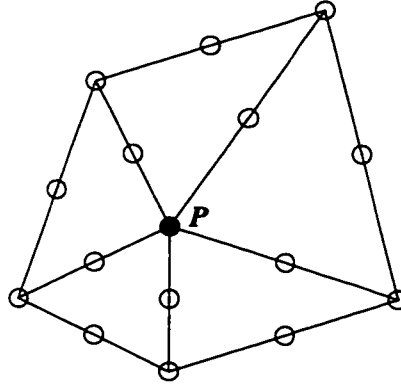


Figure 3.1: Sous-domaine Ω_S pour la projection locale

On doit effectuer autant de projections qu'il y a de sommets dans le domaine et ce pour chaque quantité que l'on désire projeter (dans cet exemple, on doit projeter les deux composantes de ∇T). On procède de la même façon lorsque le sommet est situé sur une frontière: le sous-domaine contient alors moins d'éléments et le sommet se situe en bordure du sous-domaine au lieu d'être à l'intérieur. La projection est alors un peu moins précise étant donné que l'on dispose de moins d'information.

Considérons le cas où les interpolants de T sont quadratiques. Les dérivées sont alors linéaires par morceaux (par élément) et discontinues entre les éléments. On fait alors une reconstruction polynômiale du deuxième degré sur les sous-domaines Ω_S à partir des quantités linéaires discontinues par élément.

Soit $q = \frac{\partial T}{\partial x}$ la quantité à projeter. On désigne par $q_h = \frac{\partial T_h}{\partial x}$ la solution obtenue par éléments finis et par $q^* = (\frac{\partial T}{\partial x})^*$ la solution enrichie projetée que l'on désire

construire et que l'on approche par un polynôme quadratique:

$$q^* = P a \quad (3.8)$$

où P est une base polynomiale de degré deux et a contient les coefficients indéterminés de ce polynôme:

$$P = [1, x, r, x^2, xr, r^2] \quad (3.9)$$

$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]^T \quad (3.10)$$

On détermine les coefficients a_i par la méthode des moindres carrés: on minimise l'intégrale suivante sur le sous-domaine Ω_S considéré:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_S} (q^* - q_h)^2 d\Omega \quad (3.11)$$

soit:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \int_{\Omega_S} (q^* - q_h)^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \int_{\Omega_S} (P a - q_h)^2 d\Omega \\ &= \int_{\Omega_S} P^T (P a - q_h) d\Omega \end{aligned} \quad (3.12)$$

Il en résulte que les inconnues a_i sont obtenues par la résolution du petit système (6×6) suivant:

$$\left[\int_{\Omega_S} P^T P d\Omega \right] \{a\} = \left[\int_{\Omega_S} P^T q_h d\Omega \right] \quad (3.13)$$

On considère $d\Omega = r dr dx$ pour le cas axisymétrique.

Notons que la matrice est la même pour toutes les quantités projetées et n'a donc à être évaluée qu'une seule fois.

3.1.4 Récupération d'une distribution unique

Le processus de projection locale fournit une expression de q^* pour chacun des sommets d'un triangle. q^* n'est donc pas unique à l'intérieur d'un élément. Une telle distribution globale unique est nécessaire pour évaluer une norme de l'erreur (globale ou élémentaire). En pratique, on construit ce champ global sur la base éléments finis: on détermine des valeurs nodales uniques (à partir des diverses projections q^* qui se chevauchent en ce noeud) et on utilise ensuite les interpolants de T_h pour interpoler ce champ récupéré des projections. Dans l'exemple, les interpolants sont quadratiques soit du même degré que les projections locales d'origine.

La question est maintenant de déterminer comment récupérer ces valeurs nodales à partir des projections. Pour les noeuds situés aux sommets des éléments, on prend la valeur issue de la projection centrée autour de ce noeud, c'est-à-dire la projection associée à ce noeud. Pour les noeuds au milieu des arêtes, on prend la moyenne des deux projections associées aux deux sommets du segment. En désignant par \tilde{q} cette solution récupérée dans les interpolants N_i de la solution et par \tilde{q}_i les valeurs nodales de cette récupération, on a finalement:

$$\tilde{q} = \sum_{i=1}^N N_i \tilde{q}_i \quad (3.14)$$

La figure 3.2 illustre sur un problème unidimensionnel cette distinction entre les projections et la récupération d'un champ global. On considère trois éléments quadratiques et on illustre comment récupérer, à partir des projections, un champ de dérivées q sur l'élément #2. La solution numérique q_h est linéaire par élément et discontinue. Une projection est effectuée sur le sous-domaine contenant les éléments #1 et #2 et associé au noeud #1 (a). Une autre projection sur le sous-domaine

contenant les éléments #2 et #3 est associée au noeud #3 (b). Ces deux projections quadratiques se chevauchent dans l'élément #2. Les valeurs nodales aux noeuds #1 et #3 s'obtiennent en évaluant les projections au noeud qui leur est associé (c). La valeur nodale pour le noeud #2 est obtenue en faisant la moyenne des deux projections évaluées à cette position (c). On obtient finalement la distribution récupérée sur l'élément #2 en utilisant l'interpolant quadratique défini par les trois valeurs nodales.

Il existe d'autres techniques pour récupérer dans la base éléments finis une solution issue de projections, notamment au niveau des noeuds sur les arêtes. On peut par exemple effectuer une projection directement associée à ce noeud en prenant comme sous-domaine de projection les éléments voisins à ce noeud, qui sont au nombre de deux. La valeur nodale est alors déduite de cette projection. Le principe n'est pas mauvais en soit, mais on opte plutôt pour la technique avec moyenne précédemment présentée. Un argument pour défendre ce choix est la quantité d'information mise en cause. La figure 3.3 illustre la zone qui donne une influence à la valeur nodale récupérée. On voit clairement qu'avec la technique de moyenne cette zone d'influence est beaucoup plus importante.

De même, la valeur récupérée sur le noeud central (au centroïde de l'élément) d'un élément à sept noeuds s'obtient par la moyenne des projections associées aux trois sommets de l'élément. La technique consistant à générer une projection propre à ce noeud en utilisant les éléments qui partagent ce noeud donnerait ici de piètres résultats puisqu'un seul élément y contribuerait.

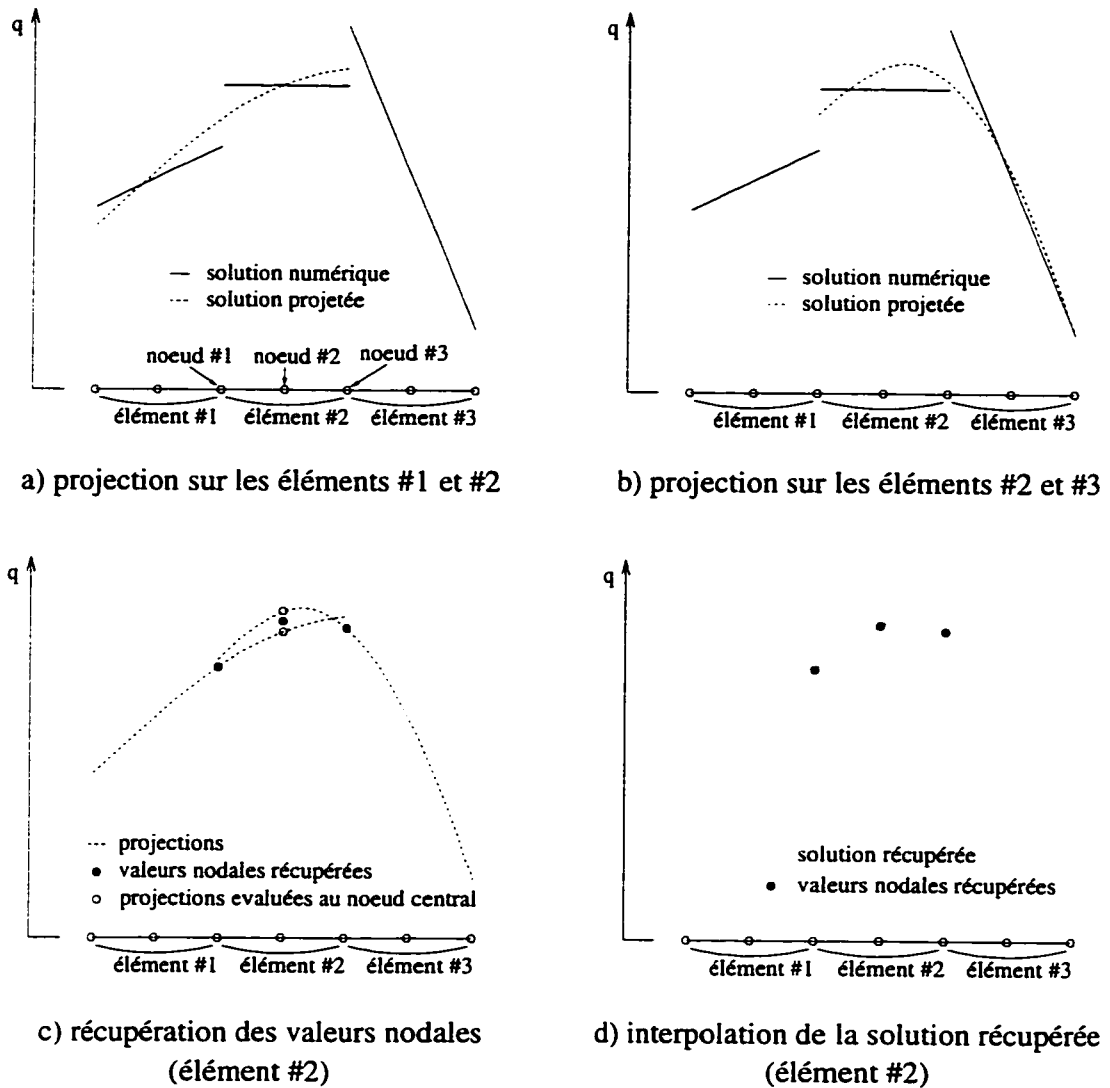


Figure 3.2: Projection locale et récupération d'un champ global

3.1.5 Équations de Navier-Stokes et écoulements turbulents

Dans le cas des équations de Navier-Stokes, on utilise l'élément de Crouzeix-Raviart qui possède des interpolants linéaires discontinus en pression et quadratiques

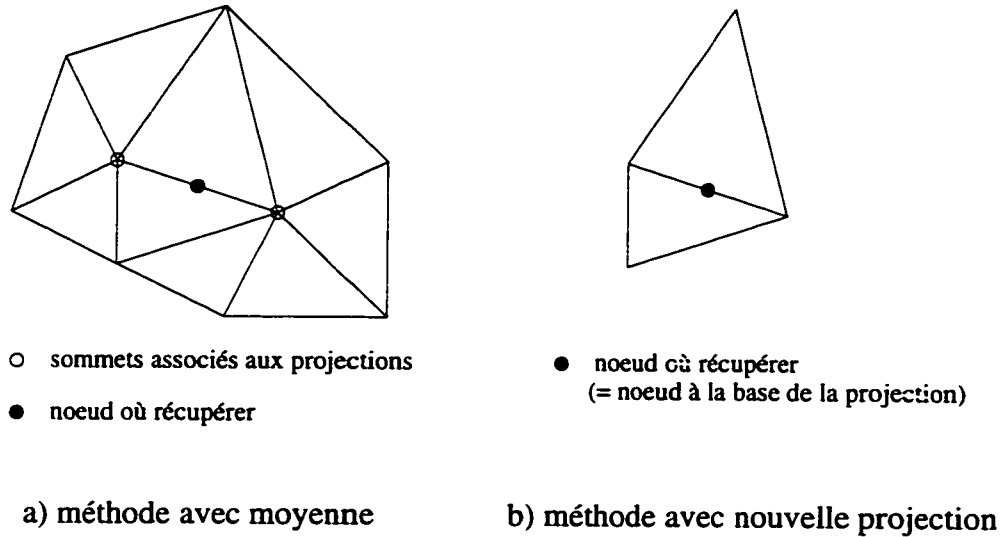


Figure 3.3: Zone d'influence pour la récupération des valeurs nodales

(enrichis d'une bulle) en vitesse. Les normes naturelles pour ce problème sont:

- pour la pression:

$$\|p\|^2 = \int_{\Omega} p^2 d\Omega \quad (3.15)$$

- pour la vitesse:

$$\|\mathbf{u}\| = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) d\Omega = \int_{\Omega} 4\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (3.16)$$

On projette donc la pression p et les composantes du tenseur de déformation $\dot{\gamma}(\mathbf{u})$ sur une base quadratique. Dans ce dernier cas, on ne considère pas le terme $\dot{\gamma}_{\theta\theta} = \frac{v}{r}$ puisqu'il n'est ni linéaire ni discontinu, un élément clé dans le choix de la base polynômiale de projection et du succès théorique de la projection. En fait, sa projection donne des résultats plutôt mitigés et de toute façon il devient rapidement négligeable puisque l'erreur sur v , qui est de type L^2 , converge à un taux d'un ordre supérieur aux termes de dérivée qui sont de type H^1 . Tremblay [23] affirme de même.

Les quantités projetées pour les termes de vitesse sont donc $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial r}$ et $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$. En notant par e^x l'erreur associée à la variable x , les normes sont:

- pour la vitesse:

$$\|e^u\| = \left\{ \int_{\Omega} 4(\tilde{\gamma} - \dot{\gamma}_h) : (\tilde{\gamma} - \dot{\gamma}_h) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

- pour la pression:

$$\|e^p\| = \left\{ \int_{\Omega} (\tilde{p} - p_h)^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

Les écoulements turbulents font pour leur part intervenir des variables supplémentaires, k et ϵ (ou K et E), qui utilisent des interpolants quadratiques dans ce cas-ci. Leurs dérivées sont linéaires discontinues et les normes utilisées sont:

- pour K :

$$\|K\|^2 = \int_{\Omega} \nabla K \cdot \nabla K d\Omega \quad (3.19)$$

- pour E :

$$\|E\|^2 = \int_{\Omega} \nabla E \cdot \nabla E d\Omega \quad (3.20)$$

Les quantités projetées sont donc les composantes du gradient de K ($\mathbf{q}_K = \nabla K = (\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial r})$) et les composantes du gradient de E ($\mathbf{q}_E = \nabla E = (\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial r})$). Les normes de l'erreur sont calculées selon:

- pour K :

$$\|e^K\| = \left\{ \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{q}}_K - \mathbf{q}_{K_h}) \cdot (\tilde{\mathbf{q}}_K - \mathbf{q}_{K_h}) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

- pour E :

$$\|e^E\| = \left\{ \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{q}}_E - \mathbf{q}_{E_h}) \cdot (\tilde{\mathbf{q}}_E - \mathbf{q}_{E_h}) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

On effectue aussi une projection pour la viscosité turbulente, soit sur les composantes de son gradient $\mathbf{q}_{\mu_T} = \nabla \mu_T = (\frac{\partial \mu_T}{\partial x}, \frac{\partial \mu_T}{\partial r})$. En effet, bien que la viscosité turbulente μ_T soit une fonction directe de K et E , elle peut avoir une distribution bien différente. La distribution de l'erreur est par conséquent bien différente elle aussi. De plus, μ_T est un paramètre très important dans la prédiction des autres variables, en particulier la vitesse, d'où l'intérêt de contrôler sa précision. La norme de l'erreur pour la viscosité turbulente est alors calculée de la façon suivante:

$$\|e^{\mu_T}\| = \left\{ \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{q}}_{\mu_T} - \mathbf{q}_{\mu_{T_h}}) \cdot (\tilde{\mathbf{q}}_{\mu_T} - \mathbf{q}_{\mu_{T_h}}) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

3.2 Opérateur de transition

C'est à partir de l'analyse d'erreur que l'opérateur de transition détermine les propriétés que devrait avoir le maillage du cycle adaptatif suivant. Il détermine une distribution ou fonction de taille des éléments. Cette fonction $\delta(x, r)$ définit la taille que devrait avoir un élément situé à la position (x, r) .

On cherche à obtenir un maillage dit *optimal* qui répartit l'erreur également sur tous les éléments. On doit donc réduire la taille des éléments là où la précision est insuffisante et augmenter la taille des éléments là où l'erreur est trop faible.

L'opérateur utilisé a un double mandat: il doit tenter d'équ répartir la norme de l'erreur sur tous les éléments et il doit aussi tenter d'atteindre une norme d'erreur globale préétablie. Dans ce cas-ci, on commande une réduction de la norme de l'erreur globale par un facteur ξ prédéfini entre chaque cycle adaptatif.

On a la relation suivante entre l'erreur globale et les erreurs élémentaires:

$$\|e\|_{\Omega}^2 = \sum_K \|e\|_K^2 \quad (3.24)$$

où $\|e\|_{\Omega}$ désigne la norme globale (sur tout le domaine) de l'erreur et $\|e\|_K$ la norme de l'erreur sur l'élément K . On ne considère pour l'instant qu'une seule norme, sur une seule variable. On verra plus loin le traitement des cas à plusieurs variables et normes.

La norme globale de l'erreur que l'on désire obtenir sur le maillage du cycle suivant, $\|e_{cible}\|_{\Omega}$, est une fraction ξ de l'erreur actuelle:

$$\|e_{cible}\|_{\Omega} = \xi \|e\|_{\Omega} \quad (3.25)$$

On désire en plus répartir cette erreur également sur tous les éléments. L'équation (3.24) permet alors d'écrire:

$$\|e_{cible}\|_K = cte = \frac{\|e_{cible}\|_{\Omega}}{\sqrt{N_e}} \quad (3.26)$$

où $\|e_{cible}\|_K$ est l'erreur élémentaire cible et N_e est le nombre d'éléments du maillage courant.

Le critère qui permet de relier la taille élémentaire à la norme de l'erreur provient de l'estimation *a priori* de l'erreur, intimement liée au choix de l'interpolation. On utilise la notion de taux de convergence asymptotique qui dit que la norme de l'erreur est proportionnelle à une puissance de la taille des éléments:

$$\|e\| = ch^{\alpha} \quad (3.27)$$

où c est une constante, h est la taille des éléments et α est le taux de convergence qui dépend du choix de l'élément, ou plus précisément de ses interpolants, et de la norme considérée.

Cette dernière relation peut être utilisée tant pour le maillage courant que pour celui qu'on veut générer. Sur le maillage courant on a :

$$\|e\|_K = ch_K^\alpha \quad (3.28)$$

alors que sur le maillage recherché :

$$\|e_{cible}\|_K = c\delta_K^\alpha \quad (3.29)$$

Les tailles des éléments du maillage courant h_K sont connues et on cherche la nouvelle distribution de taille δ_K . Des équations (3.25), (3.26), (3.28) et (3.29) on obtient :

$$\delta_K = \left(\frac{\xi \|e\|_\Omega}{\|e\|_K \sqrt{N_e}} \right)^{1/\alpha} h_K \quad (3.30)$$

Cette dernière équation fournit la taille δ_K que devront avoir les éléments situés dans la zone de l'élément courant K au prochain cycle adaptatif. L'ensemble des tailles définies élément par élément fournit une distribution globale $\delta(x, r)$ sur tout le domaine. Cette distribution est fournie comme paramètre d'entrée au mailleur. Notons aussi qu'on peut lisser ce champ de taille discontinu pour limiter les transitions trop brutales.

Dans le cas de la résolution d'écoulements turbulents, plusieurs variables avec leurs normes associées entrent en jeu. On procède alors de la façon décrite ci-haut pour chacune des variables dépendantes. On obtient ainsi plusieurs distributions de taille. On prend alors, pour chaque élément, la taille minimale commandée par les différentes variables. Cela nous assure de réduire l'erreur sur chaque variable d'au moins un facteur ξ . Évidemment, le principe d'équirépartition s'en trouve affecté : on ne peut pas équirépartir simultanément l'erreur selon chacune des variables. Il

en résulte par exemple que si l'on commande une réduction de l'erreur par un facteur $\xi = 1$, c'est-à-dire aucune réduction, le nombre d'éléments peut quand même augmenter.

Le taux de convergence pour l'élément de Crouzeix-Raviart et des interpolants quadratiques pour les variables de turbulence K et E est de $\alpha = 2$, pour toutes les normes utilisées.

Chapitre 4

Vérification

La première série de simulations numériques a pour but de vérifier le bon fonctionnement du résolveur et du module adaptatif. Pour cela, on résout des problèmes qui possèdent une solution analytique. On ne tente pas ici de valider le modèle mathématique, mais on vérifie plutôt si le résolveur arrive à bien résoudre les équations de ce modèle. On désire s'assurer que le processus adaptatif dans l'ensemble permet une convergence globale vers la solution exacte. La connaissance de la solution exacte et donc de l'erreur exacte permet en plus de vérifier la qualité et la précision locales et globales de l'estimation d'erreur. En définitive, cette étape de vérification soulève les points forts et les points faibles avec quelques observations.

4.1 Jet analytique avec viscosité turbulente constante

Le cas test analytique étudié correspond à une approximation d'un jet libre axisymétrique et turbulent. Les différents cas test présentés aux sections suivantes ne sont que des variantes à ce même jet. Les expressions pour la vitesse, la pression et la viscosité turbulente proviennent d'une analyse de Schlichting [26]. Cette solution que l'on considère comme solution analytique exacte n'est pas une solution exacte du modèle $k - \epsilon$ présenté. Ici, on pose que cette solution est la solution désirée et on détermine les termes sources des équations de mouvement et de turbulence de façon à ce que la solution imposée soit effectivement la solution exacte au problème posé. Schlichting propose les expressions suivantes:

$$u = \frac{3}{8\pi} \frac{c}{\epsilon_0 x} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2} \quad (4.1)$$

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{c}}{x} \frac{\eta - \frac{1}{4}\eta^3}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2} \quad (4.2)$$

où:

$$\eta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{c}}{\epsilon_0} \frac{r}{x} \quad (4.3)$$

La viscosité turbulente est considérée constante et égale à ϵ_0 . On suppose aussi que la pression est constante. La constante c dépend de la force du jet. On doit aussi satisfaire la relation suivante:

$$\frac{\epsilon_0}{\sqrt{c}} = 0,0161 \quad (4.4)$$

On résoud ce problème de façon adimensionnelle. La géométrie est présentée à la figure 4.1. On choisit c de telle sorte que la vitesse axiale maximale soit environ

égale à un (la vitesse de référence). Dans le cas présent on prend:

$$c = 7,277 \times 10^{-4} \quad (4.5)$$

$$\mu_T = \epsilon_0 = 0,0161\sqrt{c} \quad (\approx 4,34 \times 10^{-4}) \quad (4.6)$$

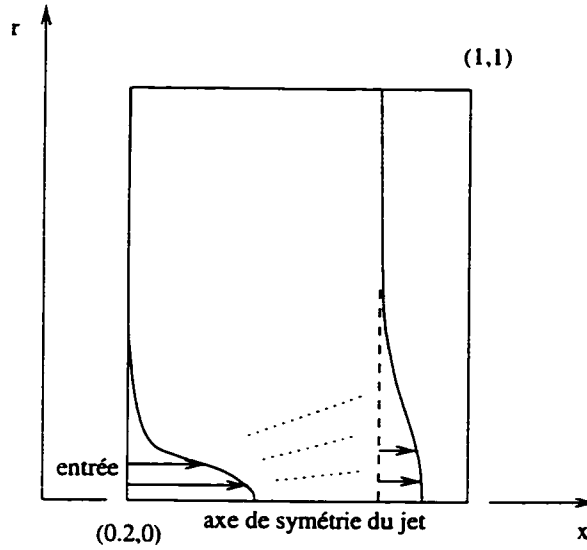


Figure 4.1: Géométrie pour le jet analytique

La viscosité laminaire μ est pour sa part fixée à 10^{-6} et la masse volumique ρ à un.

La pression est en fait légèrement modifiée pour éviter d'introduire des erreurs issues de l'inexactitude des conditions aux limites. On veut imposer sur la frontière du haut une traction radiale nulle:

$$2(\mu + \mu_T) \frac{\partial v}{\partial r} - p = 0 \quad (4.7)$$

On utilise donc:

$$p = p(x) = 2(\mu + \mu_T) \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=1} \quad (4.8)$$

Il faut noter qu'on a ajouté cette pression pour minimiser l'erreur. Dans les faits, $\frac{\partial v}{\partial r}$ est suffisamment faible pour que la pression ne soit à toute fin pratique pas perceptible au niveau du raffinement atteint.

Schlichting [26] ne fournit pas d'expressions pour l'énergie cinétique de la turbulence k et son taux de dissipation ϵ . On se fie plutôt sur les mesures expérimentales de Wagnanski et Fiedler [27] qui indiquent que k/u_c^2 a une allure similaire à celle de u/u_c (u_c est la vitesse axiale sur l'axe de symétrie) mais avec un maximum d'environ 0,1. On impose aussi une borne inférieure pour éviter que k ne prenne de trop faibles valeurs. De toute façon, la relation précédente est basée sur une observation près du jet seulement. Le choix est donc:

$$k = 0,1uu_c + 10^{-4} \quad (4.9)$$

La fonction correspondante pour ϵ est déduite de l'équation définissant la viscosité turbulente, soit:

$$\epsilon = \frac{\rho C_\mu k^2}{\mu_T} \quad (4.10)$$

Les conditions aux frontières utilisées sont des conditions de Dirichlet partout sauf sur l'axe de symétrie (où l'on impose $v = 0$ et $u = libre$ c'est-à-dire une traction nulle dans la direction axiale) et sur la frontière du haut (où l'on impose $v = libre$ pour fixer le niveau de pression).

Ce problème est résolu avec la formulation GLS puisque la formulation de type Galerkin n'arrive pas à converger sur les cycles plus raffinés. On utilise la formulation en variables logarithmiques en commandant une réduction de l'erreur par un facteur deux entre les cycles adaptatifs. La pression est la seule variable qui n'est pas utilisée par l'opérateur de transition. On désigne ce premier cas test par CAS1.

Les tableaux 4.1 à 4.4 présentent les résultats obtenus pour les normes de l'erreur. On constate que les erreurs diminuent effectivement d'un cycle à l'autre par un facteur d'au moins deux sauf peut-être pour le cycle 0. Le niveau d'erreur atteint de très basses valeurs de sorte qu'on peut en conclure que le résolveur se comporte très bien et converge véritablement vers la solution exacte. La formulation utilisée donne donc de très bons résultats. À titre d'exemple, les erreurs relatives (rapport entre la norme de l'erreur et la norme de la solution) pour le cycle 4 sont de 0,52 % pour la vitesse, 0,13 % pour K et 0,13 % pour E . Les valeurs maximales de l'erreur ponctuelle exacte sont inférieures à 10^{-3} pour la variable u et inférieures à 2×10^{-7} pour μ_T (pour le cycle 4).

L'estimation d'erreur est pour sa part assez fiable. Les indices d'efficacité globale sont bons et surtout ils s'améliorent avec le raffinement du maillage pour atteindre des valeurs près de 100 %. Seule la viscosité turbulente donne des résultats dont la qualité laisse à désirer. Cette faiblesse peut soulever des interrogations: cette moins bonne efficacité est-elle due à une mauvaise résolution, à la méthode utilisée, au cas étudié, à une erreur d'implantation...? On fait donc à la section suivante un autre cas test où la viscosité turbulente est variable pour voir si ce peut être la cause des résultats plus faibles ici. On en rediscute aussi à la section 4.4 pour tenter de trouver une explication.

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$3,488 \times 10^{-2}$	$3,803 \times 10^{-2}$	109,0
1	648	305	$2,478 \times 10^{-2}$	$2,023 \times 10^{-2}$	81,6
2	1399	674	$1,224 \times 10^{-2}$	$1,082 \times 10^{-2}$	88,4
3	3068	1497	$4,987 \times 10^{-3}$	$4,626 \times 10^{-3}$	92,8
4	6839	3368	$1,881 \times 10^{-3}$	$1,787 \times 10^{-3}$	95,0

Tableau 4.1: Erreur en vitesse (CAS1)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$1,684 \times 10^{-1}$	$1,193 \times 10^{-1}$	70,9
1	648	305	$8,620 \times 10^{-2}$	$5,236 \times 10^{-2}$	60,7
2	1399	674	$2,657 \times 10^{-2}$	$2,051 \times 10^{-2}$	77,2
3	3068	1497	$9,711 \times 10^{-3}$	$8,201 \times 10^{-3}$	84,5
4	6839	3368	$3,491 \times 10^{-3}$	$3,340 \times 10^{-3}$	95,7

Tableau 4.2: Erreur en K (CAS1)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$3,388 \times 10^{-1}$	$2,778 \times 10^{-1}$	82,0
1	648	305	$1,612 \times 10^{-1}$	$1,105 \times 10^{-1}$	68,6
2	1399	674	$5,167 \times 10^{-2}$	$4,249 \times 10^{-2}$	82,2
3	3068	1497	$1,901 \times 10^{-2}$	$1,659 \times 10^{-2}$	87,3
4	6839	3368	$6,933 \times 10^{-3}$	$6,706 \times 10^{-3}$	96,7

Tableau 4.3: Erreur en E (CAS1)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$5,327 \times 10^{-5}$	$3,713 \times 10^{-5}$	69,7
1	648	305	$1,877 \times 10^{-5}$	$7,885 \times 10^{-6}$	42,0
2	1399	674	$5,112 \times 10^{-6}$	$2,398 \times 10^{-6}$	46,9
3	3068	1497	$1,462 \times 10^{-6}$	$6,793 \times 10^{-6}$	46,5
4	6839	3368	$3,721 \times 10^{-7}$	$1,963 \times 10^{-7}$	52,8

Tableau 4.4: Erreur en μ_T (CAS1)

La figure 4.2 présente la séquence des maillages générés. On remarque que les maillages s'adaptent très bien à la solution: raffinement plus important à gauche qu'à droite et plus important dans le bas que dans le haut, soit dans les régions où la solution varie le plus. Les variables de turbulence sont un peu plus diffuses que u c'est-à-dire que leurs isolignes sont plus étendues, ce qui commande un raffinement dans la zone intermédiaire un peu au-dessus du jet central. On remarque aussi que les éléments ayant un côté sur l'axe de symétrie sont un peu plus gros que leurs voisins. Cela s'explique surtout par la présence du r dans $d\Omega$ lors de l'intégration pour évaluer les normes. Les normes de l'erreur près de $r = 0$ sont donc plus faible que les normes évaluées ailleurs pour un triangle de même surface avec une erreur ponctuelle du même niveau.

Les figures 4.3 et 4.4 présentent les isovaleurs des différentes variables de ce problème pour le premier et le dernier cycles adaptatifs. Le premier cycle donne déjà une bonne idée de la solution alors que la régularité et la netteté des isolignes sur le maillage final constitue un bon indice de la grande précision de cette solution. Enfin, on voit clairement l'importance de l'utilisation des variables logarithmiques.

Les quantités k et ϵ varient beaucoup plus rapidement que leur correspondants K et E . La résolution utilisant les variables primaires k et ϵ exigerait un raffinement beaucoup plus important près de l'entrée pour obtenir une solution aussi précise. Il faudrait quand même raffiner dans le reste du domaine pour bien capturer μ_T car même si l'erreur absolue sur k et ϵ y était relativement faible, l'erreur relative y serait quand même élevée ce qui se traduirait par une mauvaise prédiction de μ_T .

On a aussi tenté de résoudre ce problème à l'aide de la méthode de Galerkin. La convergence était alors très ardue. On a pu effectuer seulement trois cycles, la solution divergeant par la suite. Les méthodes de stabilisation ont donc un grand attrait pour de tels problèmes. On peut quand même donner les résultats partiels obtenus à titre comparatif. Les tableaux 4.5 à 4.8 montrent les résultats de l'analyse d'erreur sur ce cas que l'on note CAS2. De façon générale, on observe que les indices d'efficacité sont plus élevés qu'avec la méthode GLS. Par contre, la viscosité turbulente est encore celle qui offre les moins bons résultats de ce point de vue. Cette meilleure efficacité avec la méthode de Galerkin peut s'expliquer en partie par le fait que les méthodes de stabilisation ont tendance à réduire les oscillations et à lisser un peu la solution. La tâche de l'estimateur d'erreur est alors plus ardue puisqu'il procède justement à une forme de lissage. Il a donc tendance à sous-estimer l'erreur puisqu'il y a moins d'éléments présents dans la solution qui lui permettent de détecter cette erreur.

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$2,797 \times 10^{-2}$	$3,420 \times 10^{-2}$	122,3
1	683	318	$1,722 \times 10^{-2}$	$1,817 \times 10^{-2}$	105,5
2	1503	716	$7,146 \times 10^{-3}$	$7,432 \times 10^{-3}$	104,0

Tableau 4.5: Erreur en vitesse (CAS2)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$1,101 \times 10^{-1}$	$9,211 \times 10^{-2}$	83,6
1	683	318	$4,654 \times 10^{-2}$	$4,084 \times 10^{-2}$	87,8
2	1503	716	$1,737 \times 10^{-2}$	$1,733 \times 10^{-2}$	99,8

Tableau 4.6: Erreur en K (CAS2)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$2,027 \times 10^{-1}$	$1,783 \times 10^{-1}$	88,0
1	683	318	$9,099 \times 10^{-2}$	$8,107 \times 10^{-2}$	89,1
2	1503	716	$3,455 \times 10^{-2}$	$3,456 \times 10^{-2}$	100,0

Tableau 4.7: Erreur en E (CAS2)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$2,184 \times 10^{-5}$	$1,131 \times 10^{-5}$	51.8
1	683	318	$6,132 \times 10^{-6}$	$3,700 \times 10^{-6}$	60.3
2	1503	716	$1,300 \times 10^{-6}$	$1,034 \times 10^{-6}$	79,6

Tableau 4.8: Erreur en μ_T (CAS2)

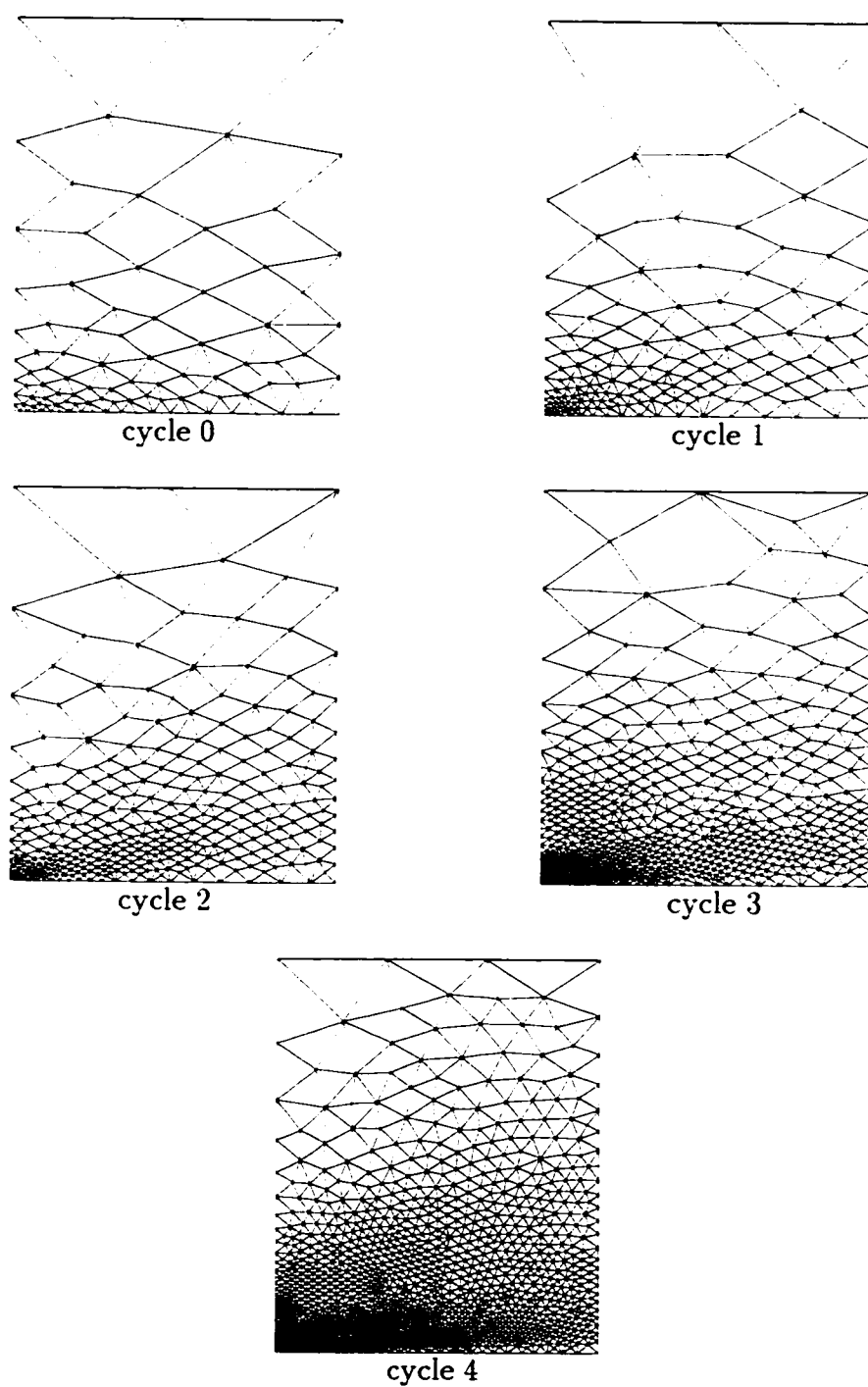


Figure 4.2: Séquence de maillages pour le CAS1

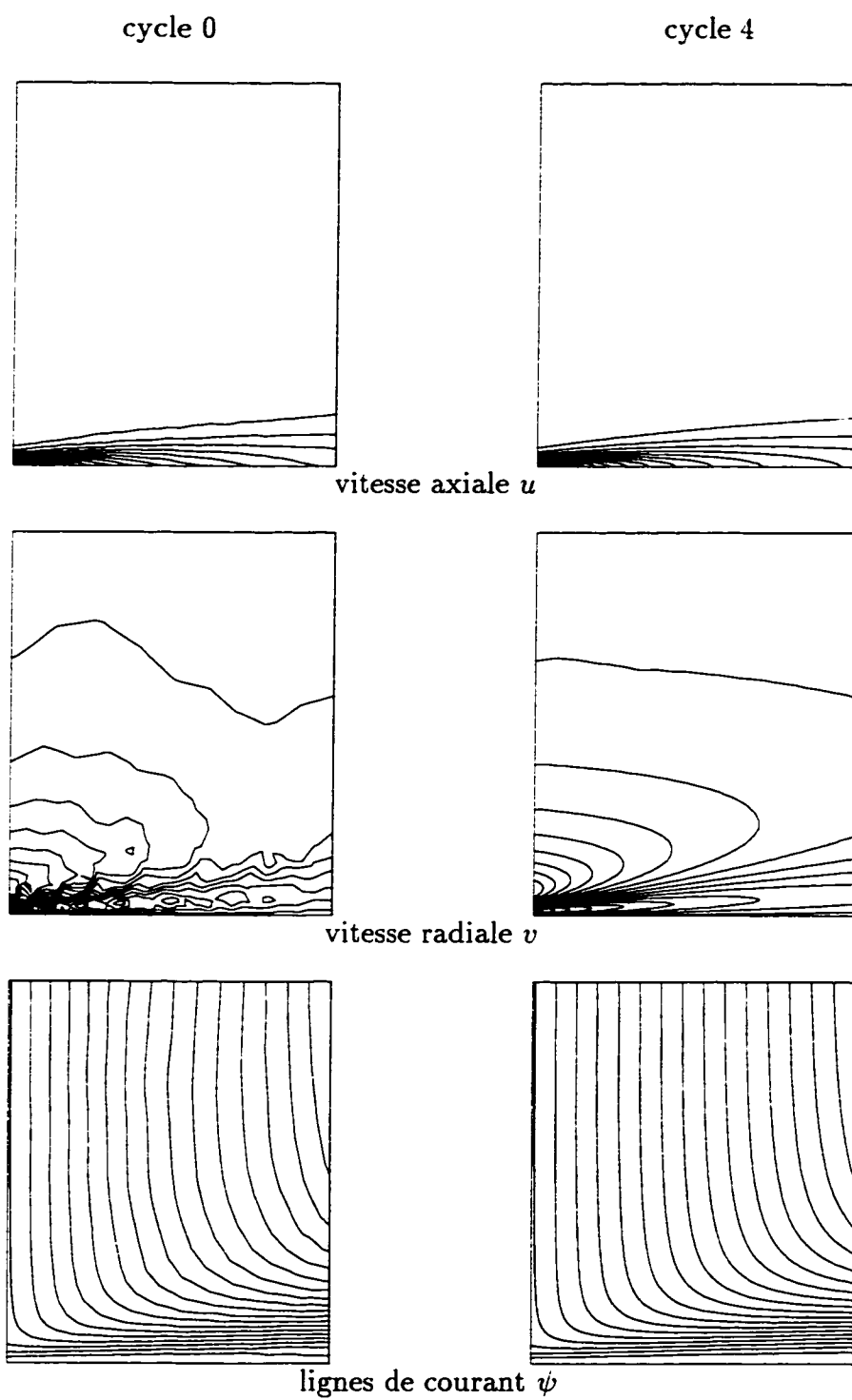


Figure 4.3: Solution pour le CAS1: u , v et ψ

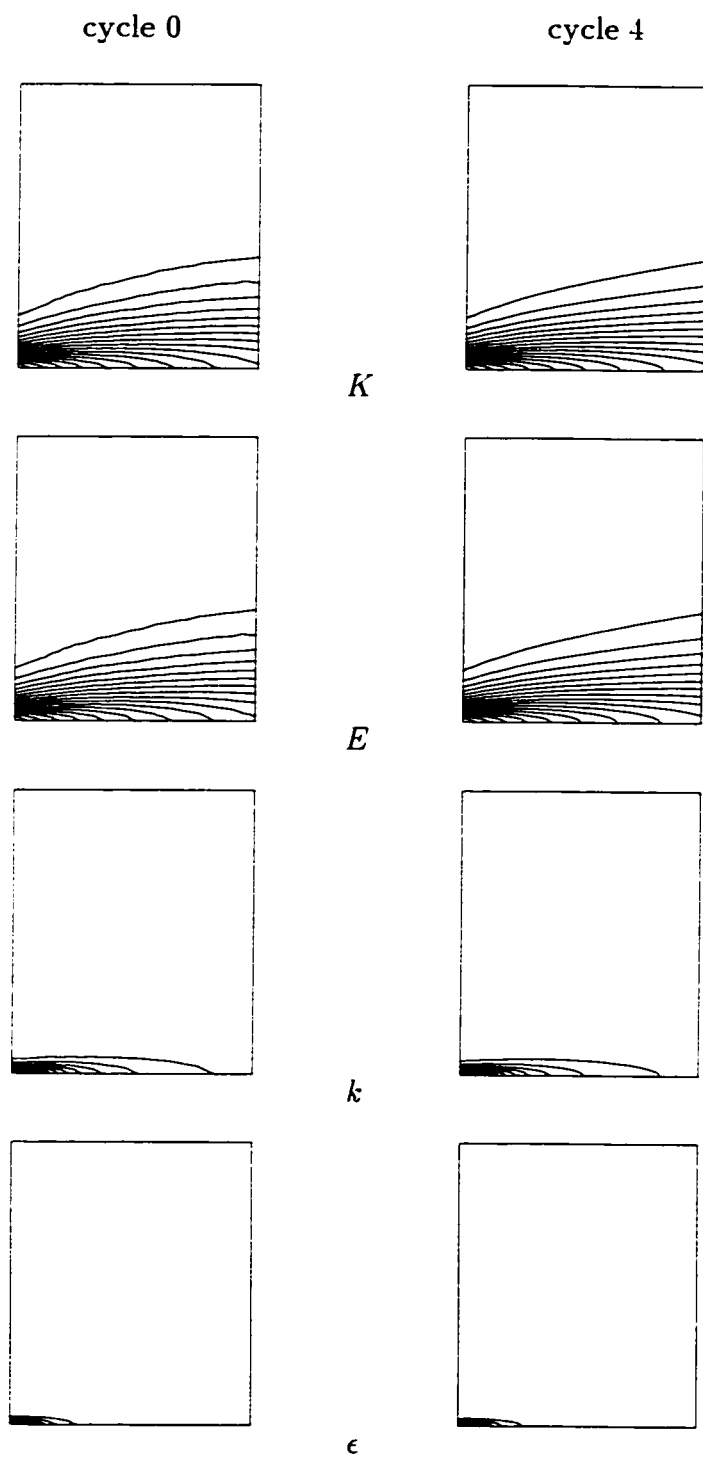


Figure 4.4: Solution pour le CAS1: K , E , k et ϵ

4.2 Jet analytique avec viscosité turbulente variable

On a vu à la section précédente que les indices d'efficacité associés à la variable μ_T étaient beaucoup moins bons que pour les autres variables. Dans ce problème, l'erreur associée à la variable μ_T ne provient pas de l'erreur d'interpolation de sa distribution exacte (qui est constante) mais plutôt du couplage entre les variables. Les erreurs de représentation de μ_T proviennent des erreurs sur les autres variables. On effectue donc ici une autre série de simulations sur une variante au problème précédent pour s'assurer qu'il ne s'agit que d'un cas particulier où la prédiction d'erreur est moins bonne et non d'un problème général qui remettrait en cause la méthode de projection. On considère un cas où la viscosité turbulente est variable.

La solution exacte que l'on choisit pour ce problème est la même que dans le cas précédent pour les variables u , v et p . Le choix de la distribution de la viscosité turbulente est basé sur des simulations effectuées sur le cas précédent en enlevant les termes source et en observant la tendance "naturelle" du modèle $k - \epsilon$. On choisit donc d'imposer:

$$\mu_T = 10^{-4} \left(5, 5e^{-\frac{y^3}{12}} + 1 \right) \quad (4.11)$$

La viscosité turbulente n'est plus constante mais elle est quand même du même ordre de grandeur et est constante sur l'axe.

Finalement, on conserve la même solution pour k et on ajuste ϵ pour respecter la nouvelle distribution de viscosité turbulente.

On résoud ce problème (noté CAS3) avec la formulation GLS et en utilisant les variables logarithmiques. Les conditions aux frontières sont du même type que pour le cas précédent. La stratégie de réduction de l'erreur entre les cycles adaptatifs est légèrement différente. On commande que l'erreur soit multipliée par 0,5 jusqu'au cycle 3, par 0,7 pour le cycle 4 et par 1,0 pour les suivants. Il a été nécessaire de réduire la sévérité de la réduction de l'erreur dans les derniers cycles pour que la solution converge. Cela permet en même temps d'augmenter le nombre de cycles et donc de permettre un meilleur ajustement du maillage.

Les tableaux 4.9 à 4.12 présentent les trajectoires d'erreur et d'efficacité obtenus. Dans l'ensemble, on peut faire les mêmes remarques que dans le cas précédent: les résultats sont satisfaisants et le processus itératif d'adaptation converge bel et bien vers la solution exacte. On voit aussi que lorsque l'on commande une réduction de l'erreur par un facteur un, donc pas de réduction, le nombre d'éléments augmente quand même. Cela est tout à fait normal puisque l'opérateur de transition prend la taille minimale parmi toutes les distributions de taille générées par toutes les normes utilisées. Il continue d'y avoir des correctifs puisque les erreurs ne peuvent pas toutes être complètement équiréparties simultanément.

Il faut porter une attention plus particulière aux indices d'efficacité, car c'est la raison pour laquelle on a étudié ce cas. On remarque ainsi que l'efficacité associée à la variable μ_T est excellente cette fois-ci. L'indice d'efficacité en vitesse qui semble plafonner est principalement dû à de l'erreur dans le haut du domaine et près des frontières où l'estimateur se comporte moins bien. On peut donc en conclure que la méthode de projection locale, bien qu'elle puisse avoir des faiblesses, fonctionne de façon satisfaisante dans l'ensemble.

On peut aussi observer d'un oeil critique les indices d'efficacité sur K qui se sont pour leur part détériorés. Le niveau d'efficacité est quand même acceptable, surtout qu'il s'améliore avec le raffinement du maillage. On peut repérer les zones fautives en examinant les indices d'efficacité élémentaires. La figure 4.5 présente pour trois cycles les zones où l'indice d'efficacité élémentaire est inférieure à 50 %. On voit clairement qu'il y a des zones très nettes où l'efficacité est faible. Cette zone semble correspondre à celle où on a de l'erreur due non pas à K directement mais plutôt à la distribution de μ_T et la réaction sur E . On a en fait la même distribution pour K qu'à la section précédente, la différence doit donc venir d'ailleurs. On voit ces nouvelles distributions de μ_T et E à la figure 4.6, de même que le maillage final. On peut constater un raffinement plus marqué que pour le CAS1 dans la zone d'intérêt (où l'efficacité en K est plus faible): il y a donc plus d'erreur dans cette zone (due à E et μ_T). On va revenir à ce problème à la section 4.4.

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$3,526 \times 10^{-2}$	$3,781 \times 10^{-2}$	107,3
1	680	321	$2,382 \times 10^{-2}$	$1,943 \times 10^{-2}$	81,6
2	1568	757	$1,006 \times 10^{-2}$	$9,299 \times 10^{-3}$	92,5
3	3737	1828	$4,342 \times 10^{-3}$	$4,039 \times 10^{-3}$	93,0
4	6688	3293	$2,246 \times 10^{-3}$	$2,097 \times 10^{-3}$	93,3
5	8678	4285	$1,721 \times 10^{-3}$	$1,610 \times 10^{-3}$	93,6
6	11449	5664	$1,236 \times 10^{-3}$	$1,156 \times 10^{-3}$	93,6

Tableau 4.9: Erreur en vitesse (CAS3)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$2,096 \times 10^{-1}$	$1,367 \times 10^{-1}$	65,2
1	680	321	$9,739 \times 10^{-2}$	$5,987 \times 10^{-2}$	61,5
2	1568	757	$2,933 \times 10^{-2}$	$2,307 \times 10^{-2}$	78,7
3	3737	1828	$1,171 \times 10^{-2}$	$8,837 \times 10^{-3}$	75,5
4	6688	3293	$5,593 \times 10^{-3}$	$4,467 \times 10^{-3}$	79,9
5	8678	4285	$3,995 \times 10^{-3}$	$3,381 \times 10^{-3}$	84,6
6	11449	5664	$2,913 \times 10^{-3}$	$2,528 \times 10^{-3}$	86,8

Tableau 4.10: Erreur en K (CAS3)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$3,516 \times 10^{-1}$	$3,832 \times 10^{-1}$	109,0
1	680	321	$1,865 \times 10^{-1}$	$1,564 \times 10^{-1}$	83,9
2	1568	757	$6,481 \times 10^{-2}$	$6,217 \times 10^{-2}$	95,9
3	3737	1828	$2,643 \times 10^{-2}$	$2,584 \times 10^{-2}$	97,8
4	6688	3293	$1,391 \times 10^{-2}$	$1,370 \times 10^{-2}$	98,5
5	8678	4285	$1,011 \times 10^{-2}$	$1,001 \times 10^{-2}$	98,9
6	11449	5664	$7,620 \times 10^{-3}$	$7,592 \times 10^{-3}$	99,6

Tableau 4.11: Erreur en E (CAS3)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$7,870 \times 10^{-5}$	$7,965 \times 10^{-5}$	101,2
1	680	321	$2,596 \times 10^{-5}$	$2,474 \times 10^{-5}$	95,3
2	1568	757	$9,390 \times 10^{-6}$	$8,501 \times 10^{-6}$	90,5
3	3737	1828	$3,596 \times 10^{-6}$	$3,331 \times 10^{-6}$	92,6
4	6688	3293	$1,798 \times 10^{-6}$	$1,735 \times 10^{-6}$	96,5
5	8678	4285	$1,318 \times 10^{-6}$	$1,295 \times 10^{-6}$	98,3
6	11449	5664	$9,790 \times 10^{-7}$	$9,660 \times 10^{-7}$	98,7

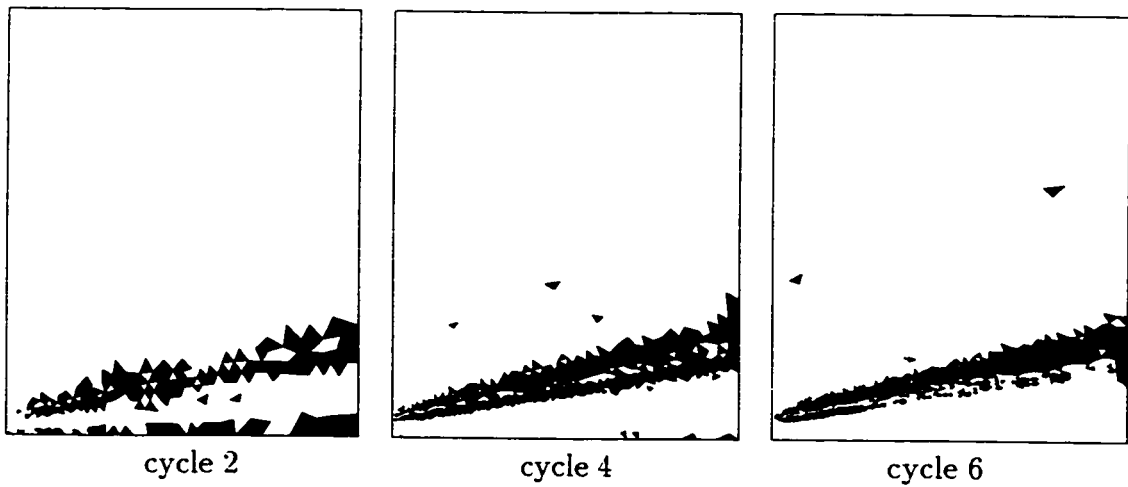
Tableau 4.12: Erreur en μ_T (CAS3)

Figure 4.5: Zones de faible efficacité (CAS3)

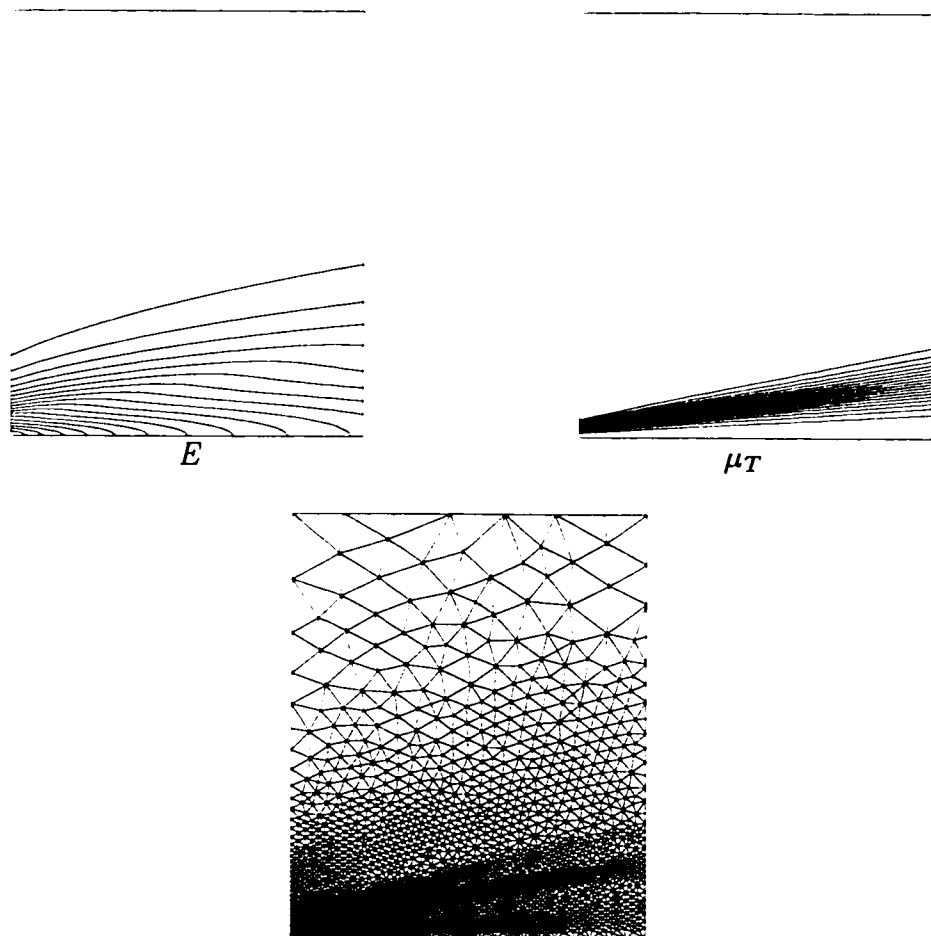


Figure 4.6: Solution pour le CAS3 (cycle 6): E , μ_T et le maillage

4.3 Jet analytique avec k modifié

On présente ici un dernier cas test similaire aux deux précédents, noté CAS4. On a encore une viscosité turbulente variable, mais les variables k et ϵ ont une forme similaire. On choisit cette fois-ci:

$$k = 4 \times 10^{-3} \frac{e^{-\frac{\eta^3}{5}}}{x^2} + 10^{-4} \quad (4.12)$$

$$\mu_T = 5 \times 10^{-4} e^{-\frac{\eta^3}{5}} + 5 \times 10^{-5} \quad (4.13)$$

$$\epsilon = \frac{\rho C_\mu k^2}{\mu_T} \quad (4.14)$$

Les fonctions pour u , v et p demeurent inchangées. On impose cette fois-ci une condition de neumann (dérivée normale nulle) sur K et E sur l'axe de symétrie au lieu d'une condition de Dirichlet. Il faut noter qu'après vérification, ce n'est pas ce dernier changement qui est à la source des problèmes précédemment mentionnés. On utilise à nouveau la formulation GLS avec des variables logarithmiques et on commande une réduction de l'erreur par un facteur deux entre les cycles adaptatifs.

Les résultats sont présentés aux tableaux 4.13 à 4.16. Il n'y a toujours pas de problème qui fait surface au niveau de la résolution. La solution numérique se rapproche de la solution exacte. On a cette fois-ci de très bonnes efficacités sur toutes les variables et ce même sur les cycles intermédiaires. Il n'y a pas vraiment de variable qui présente un comportement plus étrange ou moins bon que les autres.

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$4,084 \times 10^{-2}$	$4,029 \times 10^{-2}$	98,7
1	658	311	$2,659 \times 10^{-2}$	$2,173 \times 10^{-2}$	81,7
2	1572	763	$1,147 \times 10^{-2}$	$9,520 \times 10^{-3}$	83,0
3	3693	1812	$5,691 \times 10^{-3}$	$5,024 \times 10^{-3}$	88,3
4	9141	4520	$2,035 \times 10^{-3}$	$1,848 \times 10^{-3}$	90,8

Tableau 4.13: Erreur en vitesse (CAS4)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$1,250 \times 10^0$	$1,175 \times 10^0$	94,0
1	658	311	$6,344 \times 10^{-1}$	$7,181 \times 10^{-1}$	113,2
2	1572	763	$2,573 \times 10^{-1}$	$2,567 \times 10^{-1}$	99,8
3	3693	1812	$8,896 \times 10^{-2}$	$8,642 \times 10^{-2}$	97,2
4	9141	4520	$3,166 \times 10^{-2}$	$3,085 \times 10^{-2}$	97,4

Tableau 4.14: Erreur en K (CAS4)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$2,350 \times 10^0$	$2,336 \times 10^0$	99,4
1	658	311	$1,246 \times 10^0$	$1,518 \times 10^0$	121,9
2	1572	763	$5,032 \times 10^{-1}$	$5,367 \times 10^{-1}$	106,7
3	3693	1812	$1,786 \times 10^{-1}$	$1,792 \times 10^{-1}$	100,3
4	9141	4520	$6,354 \times 10^{-2}$	$6,262 \times 10^{-2}$	98,6

Tableau 4.15: Erreur en E (CAS4)

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	erreur exacte	projection locale	efficacité (%)
0	348	155	$1,075 \times 10^{-4}$	$9,614 \times 10^{-5}$	89,4
1	658	311	$4,099 \times 10^{-5}$	$4,035 \times 10^{-5}$	98,4
2	1572	763	$1,195 \times 10^{-5}$	$1,024 \times 10^{-5}$	85,7
3	3693	1812	$4,435 \times 10^{-6}$	$3,819 \times 10^{-6}$	86,1
4	9141	4520	$1,592 \times 10^{-6}$	$1,477 \times 10^{-6}$	92,8

Tableau 4.16: Erreur en μ_T (CAS4)

Les indices d'efficacité sont même très bons au niveau élémentaire. Le tableau 4.17 donne un aperçu de la répartition de l'indice d'efficacité élémentaire. On y donne, pour chaque norme, le pourcentage d'éléments dont l'indice d'efficacité est compris dans une certaine plage. On y voit entre autres qu'il n'y a presque plus d'éléments avec moins de 50 % d'efficacité.

intervalle d'efficacité (%)	pourcentage d'éléments			
	vitesse	K	E	μ_T
95-105	31	33	34	32
90-110	49	53	57	47
80-120	75	71	78	61
50-150	99	92	93	84

Tableau 4.17: Répartition des efficacités élémentaires

Les figures 4.7 à 4.10 présentent de manière plus visuelle les trajectoires des erreurs. Ces erreurs diminuent régulièrement et la solution numérique tend donc vers la solution exacte. On peut aussi apprécier la qualité de la prédiction de l'erreur qui est très près de l'erreur exacte.

La figure 4.11 permet de visualiser les distributions de K , E et μ_T sur le maillage final. Ce maillage est quelque peu différent des précédents et on voit qu'il s'adapte très bien à la solution.

Les figures 4.12 à 4.15 illustrent la répartition des normes des erreurs élémentaires estimées par la méthode de projection locale. On présente sous forme d'histogrammes le nombre d'éléments entachés d'une erreur comprise dans une certaine plage. Les mêmes histogrammes pour l'erreur exacte sont très semblables puisque les indices d'efficacité élémentaires sont bons. On voit qu'évidemment l'erreur moyenne diminue avec le raffinement. La situation idéale, soit l'équirépartition, correspond à une colonne unique sans dispersion. On ne peut évidemment pas atteindre parfaitement cette cible, mais on peut quand même apprécier l'augmentation de la concentration des erreurs autour de la valeur moyenne à mesure que l'on raffine. La présence d'éléments entachés d'une faible erreur peut entre autres être due à l'utilisation simultanée de plusieurs normes: une variable commande un raffinement dans une zone alors qu'une autre variable n'en a vraiment pas besoin.

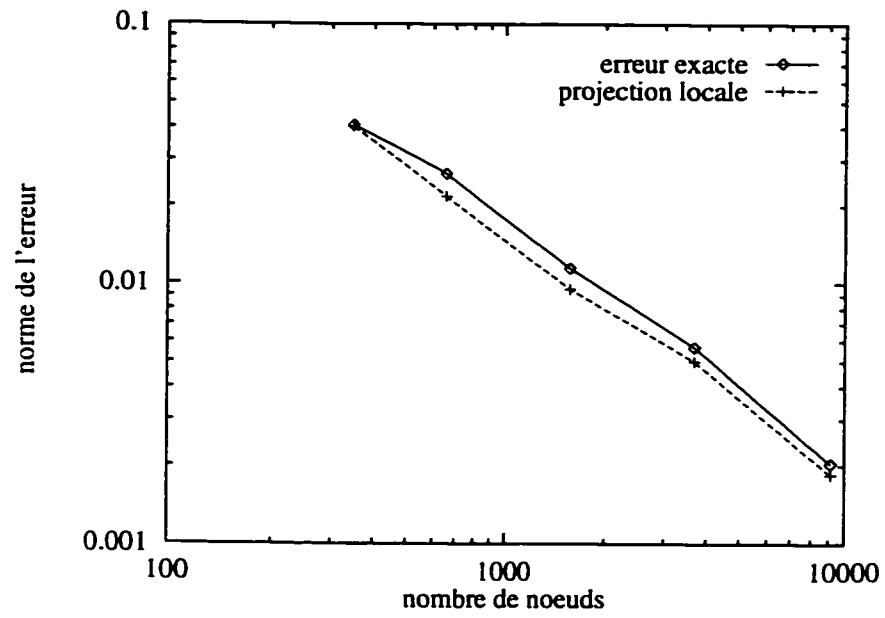


Figure 4.7: Trajectoire de l'erreur en vitesse (CAS4)

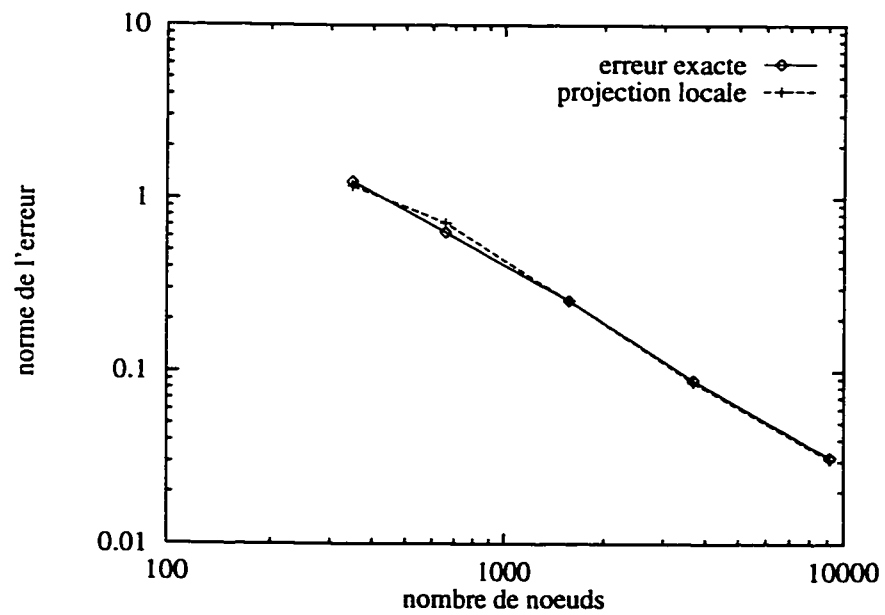


Figure 4.8: Trajectoire de l'erreur en K (CAS4)

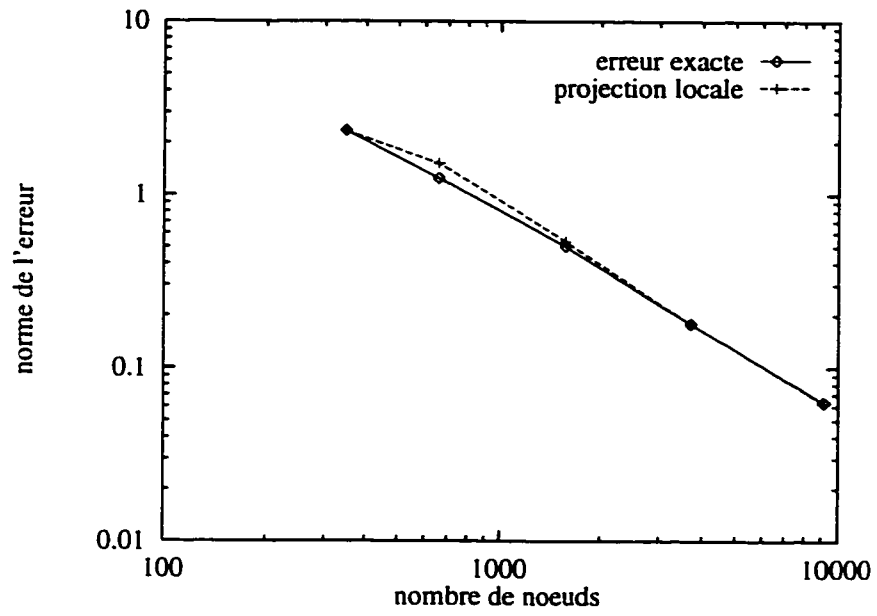


Figure 4.9: Trajectoire de l'erreur en E (CAS4)

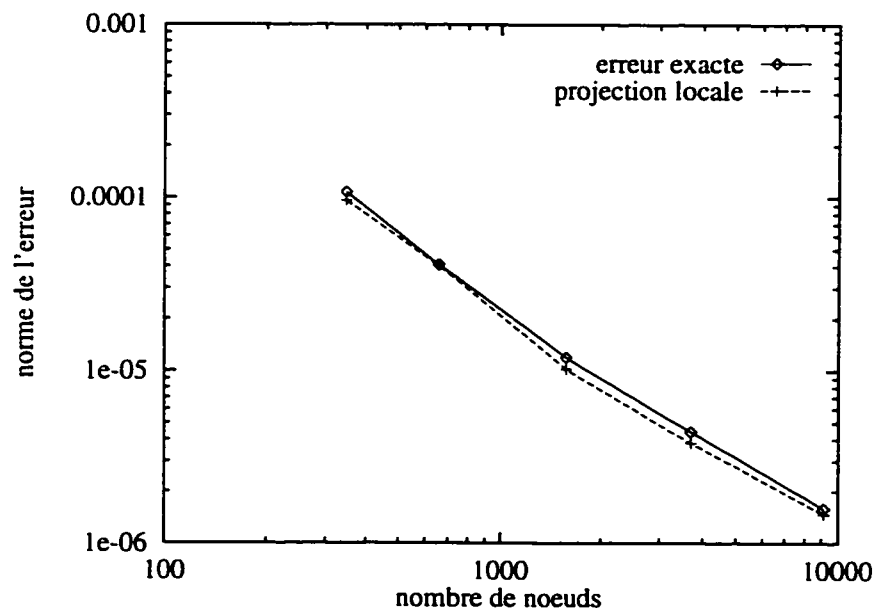


Figure 4.10: Trajectoire de l'erreur en μ_T (CAS4)

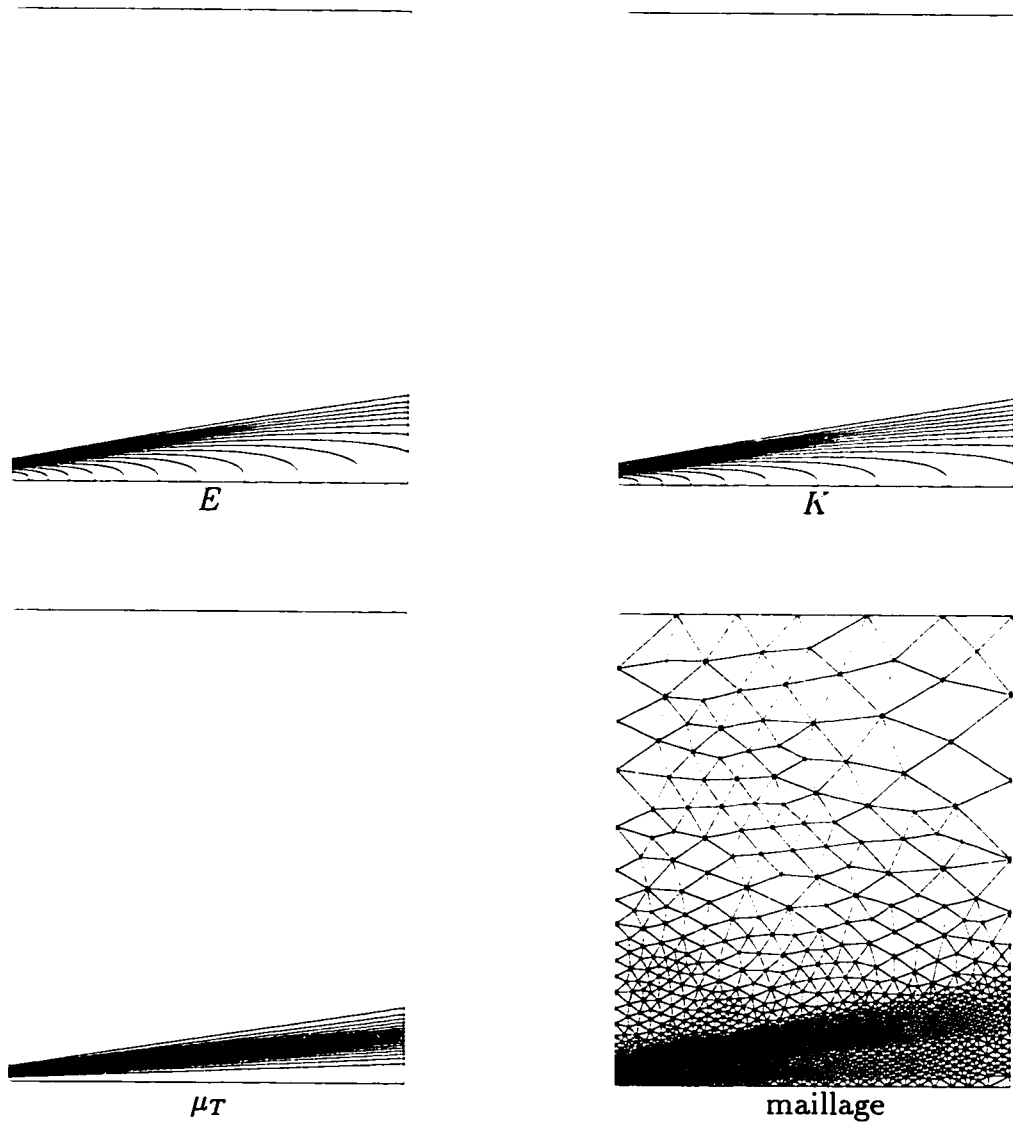


Figure 4.11: Solution pour le CAS4 (cycle 4): E , K , μ_T et le maillage

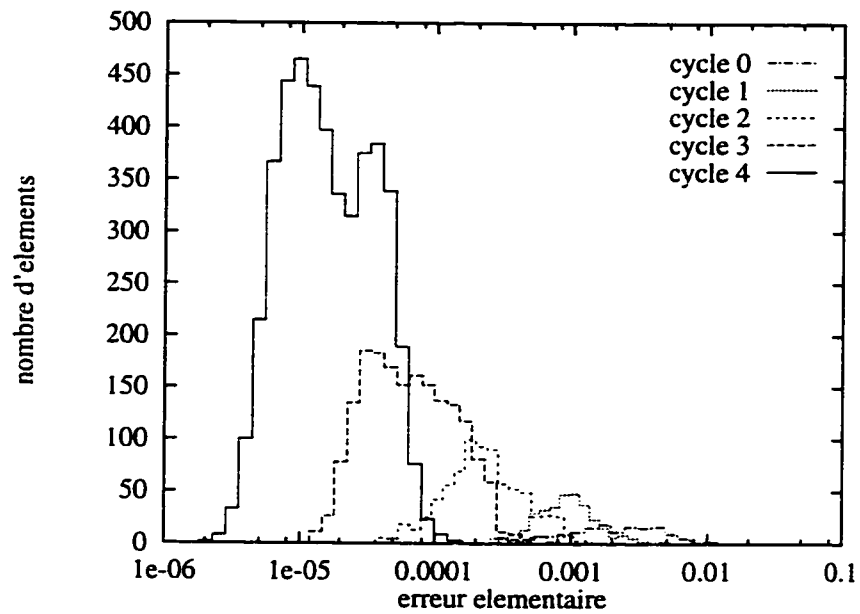


Figure 4.12: Histogramme de l'erreur estimée en vitesse (CAS4)

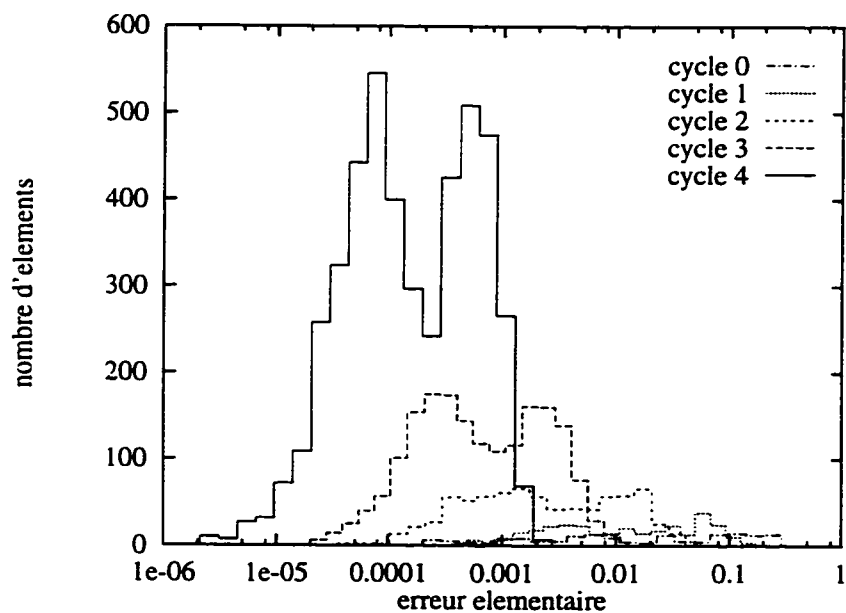


Figure 4.13: Histogramme de l'erreur estimée en K (CAS4)

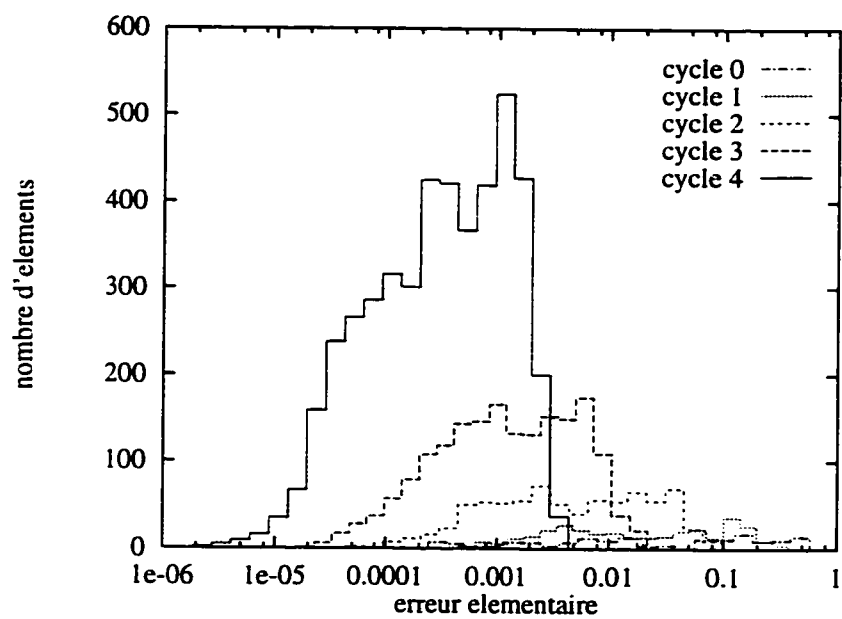


Figure 4.14: Histogramme de l'erreur estimée en E (CAS4)

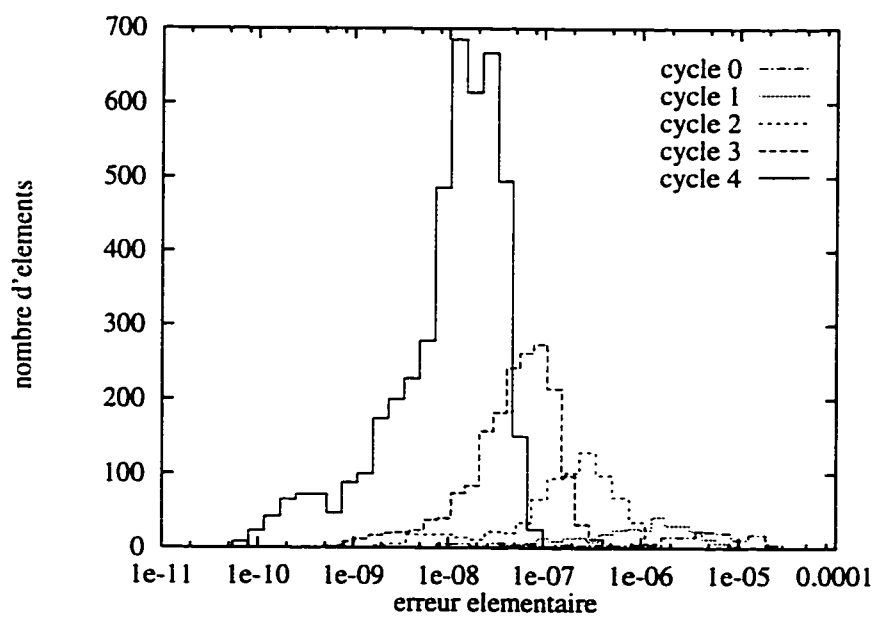


Figure 4.15: Histogramme de l'erreur estimée en μ_T (CAS4)

4.4 Problème d'efficacité: décalage de la solution

On a vu dans les sections précédentes que l'indice d'efficacité n'était pas toujours très bon. Le cas le plus critique est lorsque les efficacités élémentaires sont très basses dans de grandes zones (couvrant plusieurs éléments). On tente dans cette section de comprendre et d'expliquer les problèmes d'efficacité observés. Dans un premier temps, on montre que c'est la nature de la solution qui est responsable de l'incapacité de l'estimateur d'erreur à obtenir de bonnes prédictions. On essaie ensuite de trouver les causes potentielles de ces particularités indésirables de la solution et on discute des conséquences de ce problème.

4.4.1 Illustration sur le jet à viscosité constante (CAS1)

Ce problème a fait l'objet de la section 4.1. On avait observé que l'indice d'efficacité sur la variable μ_T était nettement inférieur aux autres variables.

La figure 4.16 illustre les isolignes de μ_T pour le cycle 4. Ces isolignes correspondent aussi aux isolignes de l'erreur ponctuelle exacte sur la quantité μ_T puisque la solution exacte est une constante. On voit clairement qu'il y a une tendance générale: au lieu d'y avoir localement sur de courtes distances des oscillations autour de la solution exacte, on a plutôt de grandes zones où la viscosité turbulente μ_T est surévaluée et de grandes zones où elle est sous-évaluée. On emploie ici l'expression **décalage** pour désigner ce comportement de surévaluation ou sous-évaluation d'un paramètre donné sur de grandes surfaces (et non de simples oscillations au niveau

d'un ou deux éléments).



Figure 4.16: Isolignes de μ_T pour le CAS1

On peut illustrer le phénomène de décalage avec des coupes. La figure 4.17 présente les résultats d'une coupe effectuée à $x = 0,8$ sur le cycle 4. On y présente les erreurs ponctuelles sur μ_T et sur $\frac{\partial \mu_T}{\partial r}$ de même que l'indice d'efficacité élémentaire dans la norme associée à μ_T . Il faut noter que les deux dernières quantités sont discontinues, d'où la présence de lignes verticales dans les graphiques. On voit très bien à nouveau le décalage sur la solution μ_T . Plus encore, sa dérivée radiale présente elle aussi des zones de décalage, particulièrement entre $r = 0,1$ et $r = 0,2$. Dans cette zone de décalage de la dérivée, l'efficacité est particulièrement mauvaise. Il faut dire que dans ce cas, l'indice d'efficacité est assez faible à bien des endroits.

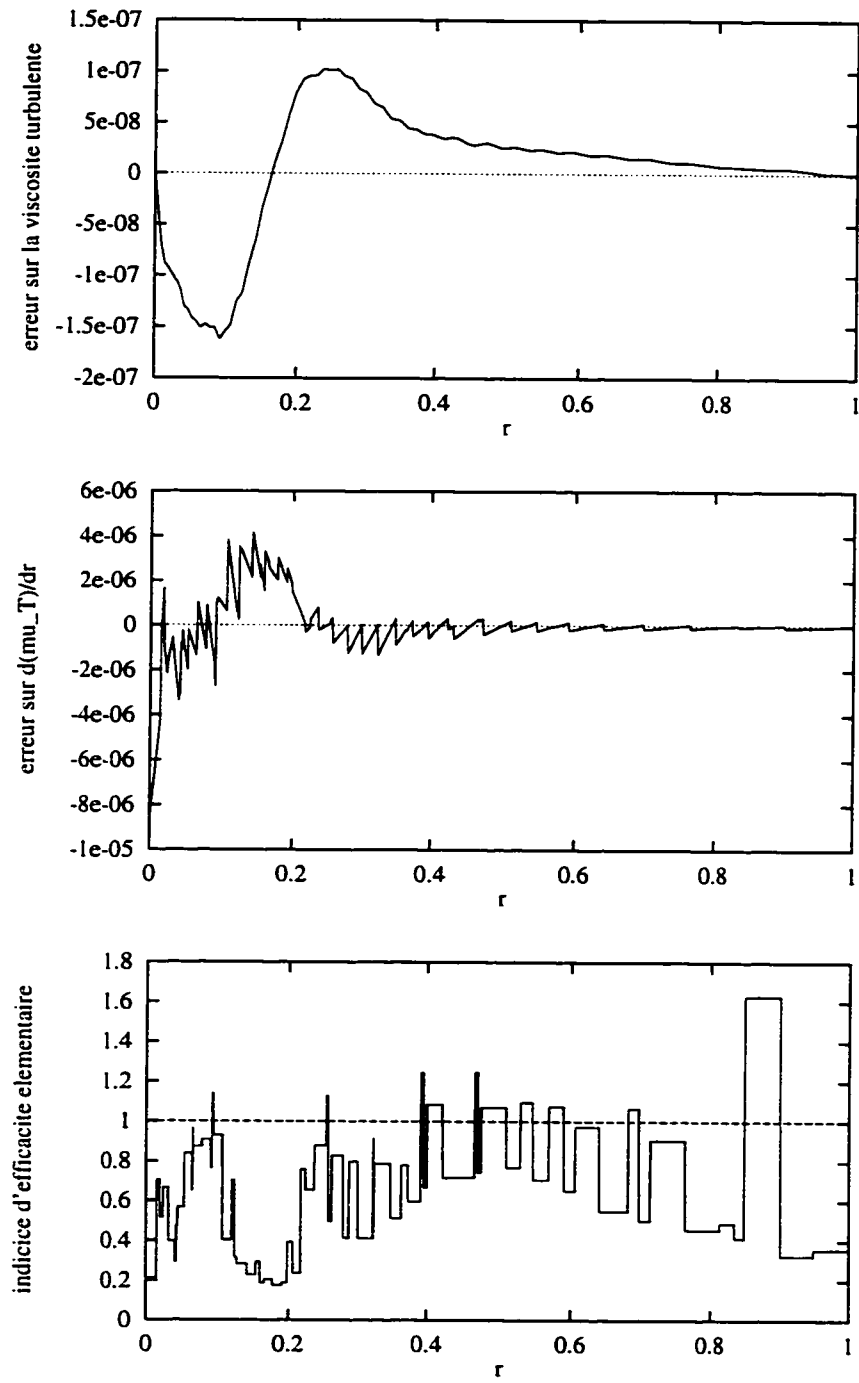


Figure 4.17: Coupe à $x = 0,8$ (CAS1): erreur sur μ_T et $\frac{\partial \mu_T}{\partial r}$ et indice d'efficacité correspondant

4.4.2 Illustration sur le jet à viscosité variable (CAS3)

Ce problème a fait l'objet de la section 4.2. On avait alors observé que l'indice d'efficacité sur la variable K était inférieur aux autres variables. On avait aussi repéré une zone où l'indice d'efficacité élémentaire était beaucoup plus bas.

La figure 4.18 présente les résultats d'une coupe effectuée à $x = 0,85$ sur le cycle 6. On y présente l'erreur ponctuelle sur K et sur $\frac{\partial K}{\partial r}$ de même que l'indice d'efficacité élémentaire associé aux normes de l'erreur en K . On a ici aussi un décalage marqué sur la solution K . Certaines zones présentent aussi un décalage sur $\frac{\partial K}{\partial r}$ (près de $r = 0,2$). Ces zones de décalage sur la dérivée correspondent aux zones où l'indice d'efficacité élémentaire est plus faible.

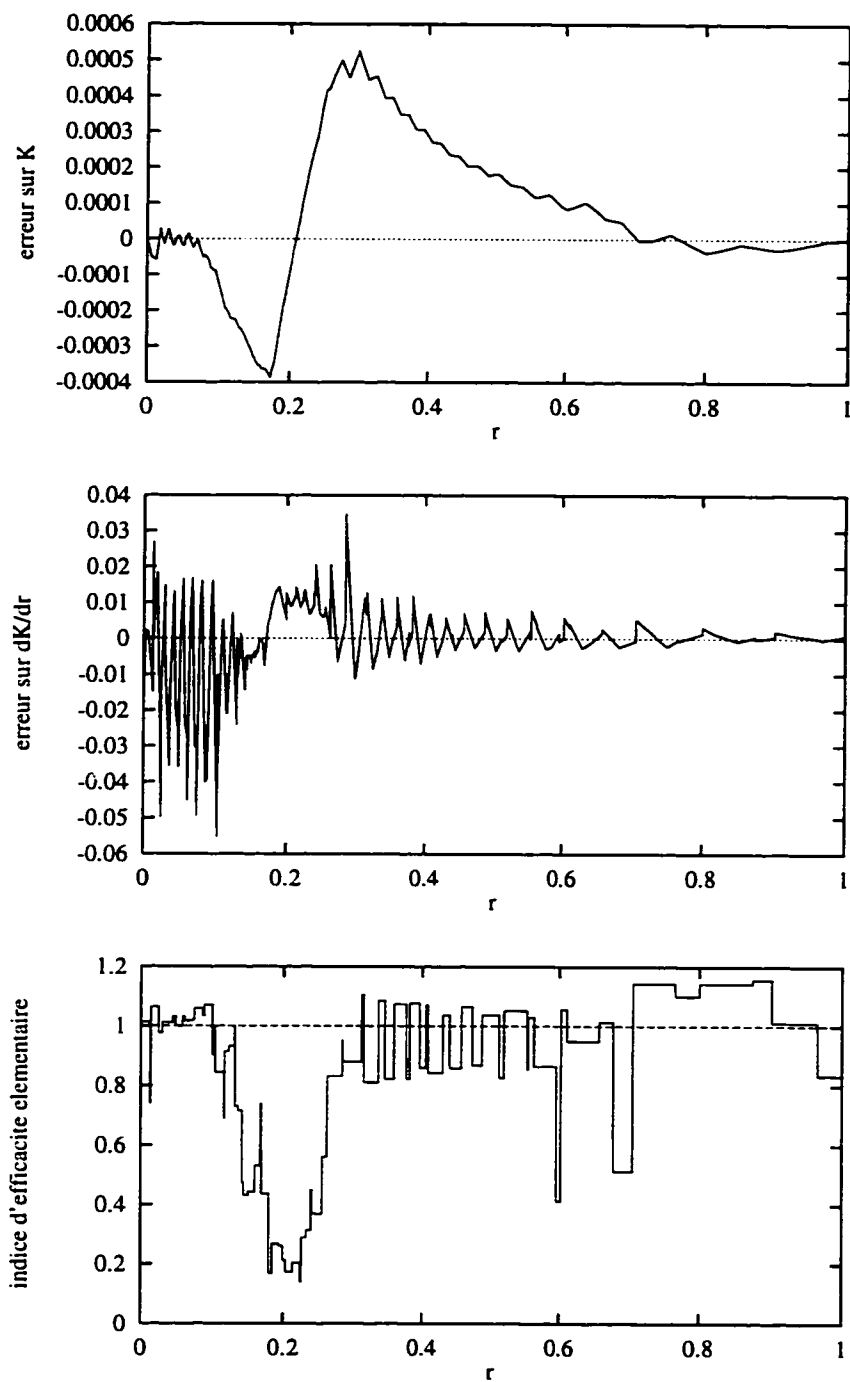


Figure 4.18: Coupe à $x = 0,85$ (CAS3): erreur sur K et sur $\frac{\partial K}{\partial r}$ et indice d'efficacité correspondant

4.4.3 Retour sur la méthode de projection

On a vu dans les deux sous-sections précédentes qu'une des causes principales de la mauvaise prédiction de l'erreur (faible indice d'efficacité) est ce qu'on a appelé le décalage de la solution. L'estimateur sous-estime l'erreur lorsque les dérivées sont décalées. Il faut se rappeler que ce sont ces dérivées qui sont considérées dans l'évaluation des normes de l'erreur.

La méthode de projection locale procède à une forme de lissage en construisant une forme polynômiale enrichie et continue. La projection est basée sur un moindre carré dont le résultat est une fonction dans le voisinage de la solution numérique. On amenuise les discontinuités et les irrégularités mais on demeure au même niveau moyen. La figure 4.19 illustre ce qui se produit lorsque la quantité d'intérêt est décalée. En présence de décalage, la solution numérique est supérieure (ou inférieure) à la solution exacte sur une distance couvrant plusieurs éléments. Cela se traduit par le fait que le signe de l'erreur est le même sur de grandes distances et donc que le niveau moyen de l'erreur n'est pas nul. La projection détecte des erreurs au niveau du lissage de la solution numérique mais ne voit pas l'erreur due au mauvais niveau moyen de la solution numérique (décalage). On sous-estime alors l'erreur.

Notons que lorsque le décalage se produit dans une zone où le niveau d'erreur est faible, l'indice d'efficacité global ne s'en trouve donc pas trop affecté. On obtient cependant une moins bonne prédiction de taille à cet endroit.

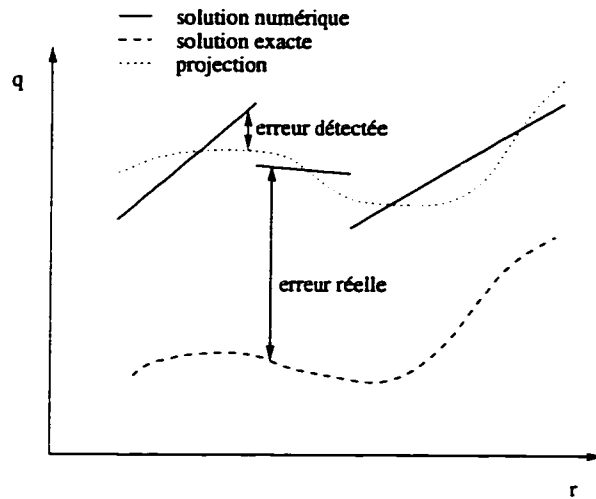


Figure 4.19: Effet du décalage sur la qualité de la prédiction de l'erreur

4.4.4 Causes potentielles du décalage

On a observé qu'il se produit parfois un phénomène de décalage qui engendre une mauvaise estimation d'erreur. On n'a cependant pas réussi à identifier exactement la cause de ce décalage. Il faut noter qu'à prime abord, rien ne prouve que ce phénomène ne peut pas se produire. On n'a pas l'assurance, par exemple, que la solution doit être exacte aux noeuds, ce qui éliminerait la possibilité de décalage. On va quand même tenter de répertorier les cas dans lesquels le phénomène s'est produit, pour finalement s'apercevoir que c'est un problème assez général et difficile à prévoir.

S'agit-il d'un problème unique au cas axisymétrique? La réponse est non. On a observé des phénomènes similaires sur un cas test analytique turbulent dans un repère cartésien.

La formulation GLS est-elle la grande responsable? Il faut avouer que généralement les indices d'efficacité obtenus avec la méthode de Galerkin sont plus élevés qu'avec la méthode GLS. En examinant les indices d'efficacité élémentaires et les dérivées de l'erreur, on a pu constater sur les quelques cas effectués que le phénomène est effectivement beaucoup moins marqué avec la méthode de Galerkin, mais il est quand même présent.

Le phénomène se produit-il uniquement sur les variables de turbulence? La réponse est non. On a observé le même problème de décalage sur u par exemple, même dans les cas présentés.

Le couplage des variables est-il un élément déclencheur? Lorsque l'on résout un système d'équations avec des variables couplées, les erreurs sur une variable dépendent non seulement de l'erreur d'interpolation de cette variable, mais aussi de l'erreur d'interpolation des autres variables. On a pu constater que dans le CAS1 les erreurs sur μ_T étaient dues à K et E alors que dans le CAS3 les zones de décalage sur $\frac{\partial K}{\partial r}$ semblaient provenir de E et μ_T . Une erreur dans une zone peut aussi provenir d'une erreur voisine qui s'est propagée. Le couplage des variables augmente donc sans aucun doute la possibilité d'obtenir le phénomène de décalage.

Un petit test bien simple permet de vérifier l'influence du couplage des variables sur le décalage. On a repris le cycle 4 du CAS3 en fournissant la valeur exacte de μ_T au lieu de déduire sa valeur de la résolution de K et E . L'indice d'efficacité global pour l'erreur en K est alors passé de 79,9 % à 96,6 %. Au niveau élémentaire, les zones de faible efficacité ont grandement diminué et le niveau d'efficacité dans ces zones s'est avéré meilleur que dans le CAS3. On observe beaucoup moins de décalage aussi. La solution K est encore un peu décalée, mais on ne perçoit à toute

fin pratique pas de décalage sur ses dérivées. Le couplage semble donc favoriser les probabilités d'obtenir du décalage, mais il n'en est pas l'unique responsable.

Un autre exemple permet de vérifier que bien que la formulation GLS et le couplage des variables semblent être plus sujets au décalage, ils ne sont pas essentiels à la production de ce décalage. On résoud un simple problème de conduction. L'idée est d'illustrer qu'il peut y avoir du décalage dans une zone, qui soit causé par une erreur d'interpolation dans une zone voisine. On choisit une distribution de température qui présente de très fortes variations près des extrémités du domaine mais qui est à toute fin pratique constante au centre. La solution exacte est:

$$T = T(r) = e^{-50r} + e^{100(r-1)} \quad (4.15)$$

Le domaine est un rectangle allant de $(0,0)$ à $(0.2,1)$. On impose des conditions de Dirichlet ($T = 1$) en haut et en bas et des conditions de Neumann nulles à gauche et à droite. La figure 4.20 montre le maillage utilisé.



Figure 4.20: Maillage pour le problème de conduction

La figure 4.21 illustre les résultats d'une coupe verticale effectuée au centre du

domaine ($x = 0, 1$). On voit très bien que la solution T et même sa dérivée $\frac{\partial T}{\partial r}$ sont décalées au centre. En effet, les erreurs ponctuelles sur T et $\frac{\partial T}{\partial r}$ sont du même signe sur de grandes distances. Il en résulte des indices d'efficacité presque nuls dans ce cas-ci. Le niveau d'erreur sur les dérivées dans la zone centrale est cependant beaucoup plus faible que près des extrémités. C'est pour cette raison qu'on a dû limiter la graduation sur la courbe de l'erreur sur $\frac{\partial T}{\partial r}$, sans quoi on n'aurait pas bien vu le décalage. Il peut donc y avoir du décalage même pour une équation scalaire elliptique simple avec la formulation de Galerkin. Il faut cependant noter un autre point: si on effectue le même calcul sur un domaine plus éloigné de l'axe, le décalage est beaucoup moins important. La présence du r dans l'intégration peut donc être en partie la cause du phénomène de sorte que le problème de décalage peut être plus fréquent dans le cas axisymétrique que dans le cas cartésien.

On peut enfin mentionner d'autres aspects dont on pourrait étudier l'effet sur le décalage. Citons par exemple la présence de termes sources dans les équations, le niveau général de l'erreur dans la solution et les erreurs introduites par les conditions aux frontières non exactement représentées (conditions de Dirichlet définies par des fonctions complexes).

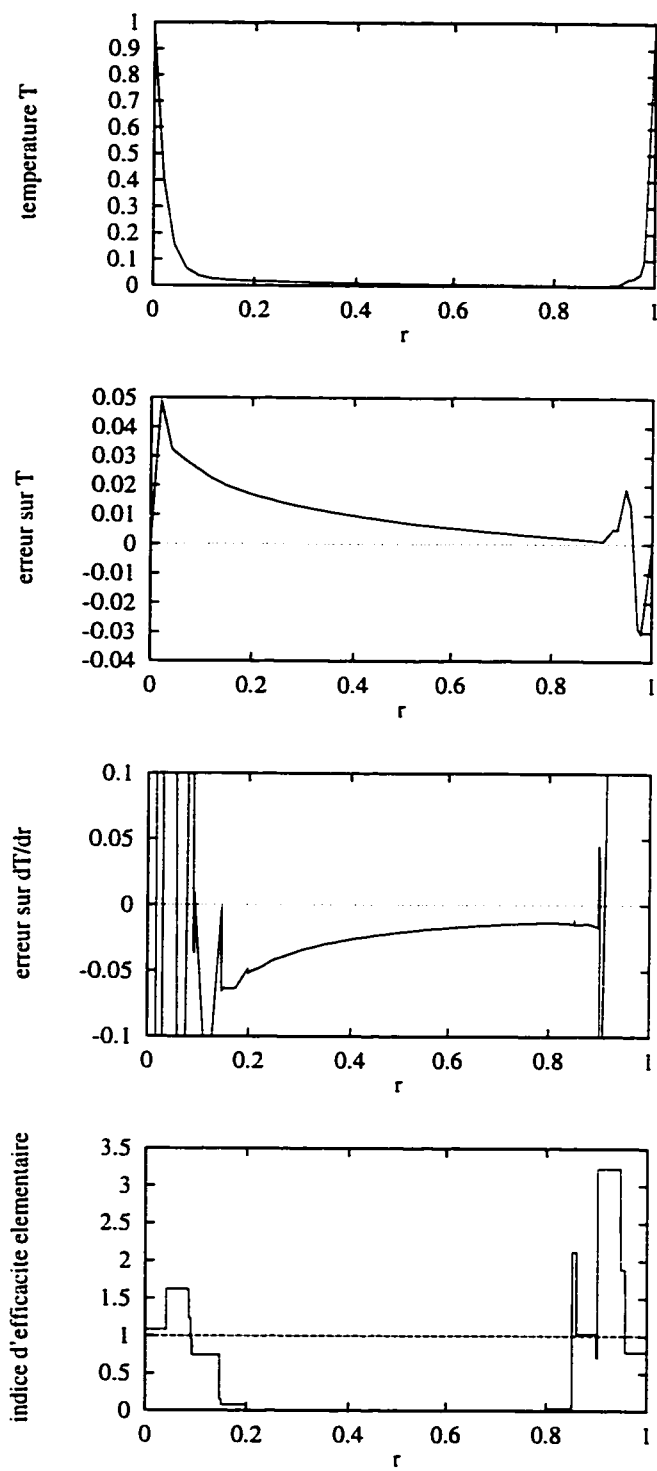


Figure 4.21: Décalage avec une équation scalaire

4.4.5 Conséquences et conclusions

On a observé dans ce chapitre une petite faiblesse au niveau de l'estimation d'erreur. Une solution peut présenter ce qu'on appelle des décalages, pour des raisons qui ne sont pas totalement connues. L'estimateur d'erreur devient alors moins efficace. La conséquence n'est cependant pas dramatique. Une mauvaise estimation d'erreur ne fait qu'entraîner une moins bonne prédiction de taille et donc un maillage subséquent légèrement différent de ce qu'il aurait dû être idéalement. Les maillages générés avec une estimation d'erreur parfaite ne sont de toute façon pas parfaits, surtout lorsqu'il y a plusieurs variables qui entrent en jeu et génèrent plusieurs distributions de taille.

La méthode de projection locale identifie quand même bien l'erreur d'interpolation ou l'erreur due aux discontinuités et irrégularités au niveau élémentaire. Après tout, c'est ce type d'erreur qu'il est critique de détecter. Dans le cas test de conduction thermique, le fait de ne pas voir l'erreur de décalage dans la zone centrale n'a pas d'importance puisqu'un raffinement dans cette zone ne changerait à peu près pas l'erreur. Il faut plutôt raffiner ailleurs, soit là où la projection locale a bien vu l'erreur.

Les variables dépendantes ont tendance à être décalées de façon beaucoup plus nette et évidente que leurs dérivées. Les résultats obtenus en projetant les dérivées sont donc assez bons, même si certaines zones présentent des faiblesses. On peut envisager de projeter directement les variables dépendantes, en faisant par exemple une reconstruction cubique à partir des distributions quadratiques de ces variables. Cette technique existe déjà dans la littérature. Il faudrait cependant être très pru-

dent. Les résultats présentés dans ce chapitre montrent clairement que l'erreur de décalage domine parfois largement l'erreur due aux oscillations pour les variables de base et ce sur presque tout le domaine. La projection risquerait alors de donner des résultats catastrophiques.

De façon générale, on peut affirmer que le résolveur et le processus adaptatif utilisés fonctionnent suffisamment bien pour leur faire confiance. On peut donc passer à l'étape suivante: les applications.

Chapitre 5

Applications

On présente dans ce chapitre quelques applications de la méthodologie à des problèmes turbulents axisymétriques. Ce sont des problèmes qui n'ont pas de solution exacte connue, mais pour lesquels on possède des mesures expérimentales. On peut ainsi valider d'une certaine façon le modèle de turbulence utilisé. On procède aussi à des études détaillées des différents schémas de stabilisation. On garde toujours en tête de démontrer la robustesse du résolveur et du processus de remaillage adaptatif dans son ensemble.

5.1 Développement d'un écoulement turbulent dans une conduite circulaire

Cette première application correspond au développement d'un écoulement turbulent dans une conduite circulaire. L'écoulement en entrée est uniforme puis il se

développe pour atteindre un état pleinement développé en sortie.

Ce problème nécessite une géométrie très allongée. On utilise plus précisément une conduite d'une longueur de 80 diamètres pour permettre à l'écoulement de se développer pleinement. Le nombre de degrés de liberté devient alors rapidement très important. On met donc en veilleuse la stratégie adaptative pour ce cas et on utilise plutôt un seul maillage avec de l'étirement. On ne tente donc pas de valider la méthode adaptative, mais on se concentre sur le résolveur. On compare en particulier les résultats obtenus avec des données expérimentales pour évaluer le comportement du modèle de turbulence. On compare aussi les résultats avec ceux de la simulation numérique de Martinuzzi et Pollard [28]. Ce cas sert enfin de premier test pour la loi de paroi.

Les références utilisées pour les mesures expérimentales sont celles de Barbin et Jones [29] ($Re = 3,88 \times 10^5$), Lawn [30] ($Re = 2,5 \times 10^5$) et Richman et Azad [31] ($Re = 3 \times 10^5$). Les comparaisons avec les résultats numériques de Martinuzzi et Pollard [28] se font au niveau de leur modèle de turbulence #1 qui correspond à celui qu'on utilise. Il faut noter que la lecture des graphiques de cette dernière référence est parfois relativement imprécise, de sorte qu'on ne s'en sert à titre d'indication.

Le domaine de calcul et les conditions aux frontières sont illustrés à la figure 5.1, qui n'est pas à l'échelle. Le choix est principalement basé sur la simulation de Martinuzzi et Pollard [28] afin de pouvoir comparer adéquatement les deux prédictions. Le nombre de Reynolds est de $3,8 \times 10^5$ basé sur la vitesse en entrée et le diamètre de la conduite. On résout le problème de façon adimensionnelle, c'est-à-dire qu'on impose $\mu = 1/Re$ et $\rho = 1$.

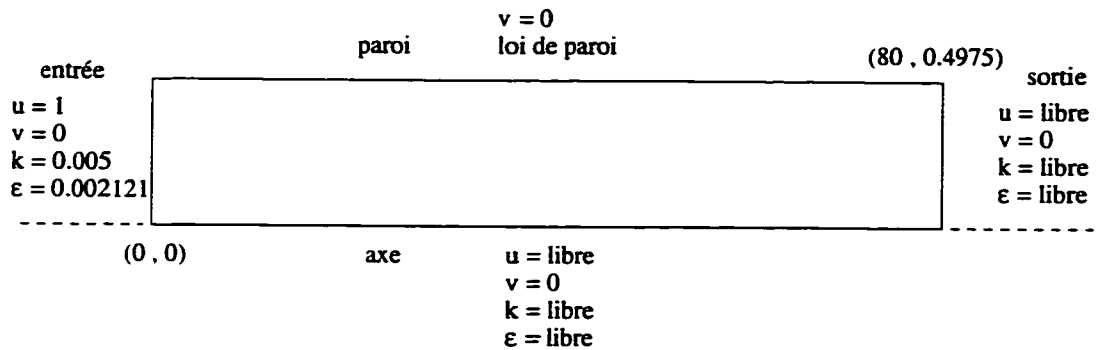


Figure 5.1: Géométrie et conditions aux limites pour l'écoulement dans une conduite

Le maillage utilisé est presque structuré et très élancé. Il est constitué de 8046 éléments et 16 373 points, soit environ 200 points selon x (régulièrement espacés) et 80 selon r (plus concentrés près de la paroi, l'élément sur la frontière ayant une dimension radiale de 0,001). La figure 5.2 illustre une section typique du maillage utilisé.

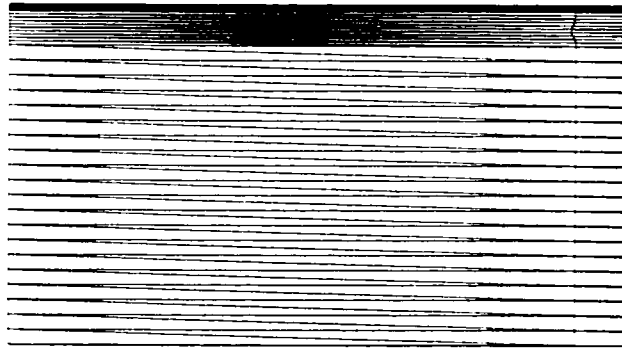


Figure 5.2: Maillage pour l'écoulement dans une conduite

On utilise la formulation Galerkin et les variables logarithmiques. La loi de paroi est celle à deux échelles de vitesse avec une distance à la paroi de $d = 0,0025$. On déplace véritablement la frontière de calcul par rapport à la paroi solide réelle. On

n'utilise pas de condition de tangence puisqu'on peut imposer directement $v = 0$ sur la paroi solide.

La figure 5.3 présente les résultats de la simulation sous forme d'isolignes des variables du problème. On peut constater que la solution est presque complètement développée en sortie (les isolignes sont horizontales et donc les dérivées axiales sont nulles). Le maillage utilisé est bien adapté pour les variations rapides près de la paroi, mais de façon générale il n'est pas très caractéristique de l'écoulement. Il aurait par exemple fallu raffiner dans la zone où l'on observe de grandes variations de K' et E , soit à partir du coin supérieur de l'entrée vers l'aval, en suivant une trajectoire descendante. Cela illustre la grande utilité du processus de remaillage adaptatif, car même si on a une idée des endroits où il faudrait raffiner en examinant la solution, le niveau de raffinement de même que sa localisation précise sont presque impossibles à déterminer à l'avance par l'utilisateur. La génération manuelle d'un maillage très bien adapté à la solution demeure très difficile, sans compter le temps d'intervention humain requis. On voit aussi qu'il serait pratique de pouvoir générer des maillages élançés de façon automatique dans un processus de remaillage adaptatif.

On voit à la figure 5.4 l'évolution du profil de vitesse axial. On y représente des coupes verticales effectuées à différentes stations. L'évolution d'un profil plat à un profil courbé développé se fait principalement par cisaillement. Le cisaillement est d'abord présent près de la paroi alors que le cœur de l'écoulement demeure plat et ne réagit que comme un écoulement potentiel en réaction à l'étranglement qui l'accélère. Le cisaillement entraîne ensuite de plus en plus de fluide et la zone affectée par ce cisaillement grandit jusqu'à couvrir toute la largeur du domaine. On voit aussi qu'avec l'utilisation d'une loi de paroi, la solution ne se rend pas tout

à fait jusqu'à la paroi solide et la vitesse sur la frontière de calcul n'est pas nulle. Notons qu'avec le choix de distance à la paroi de $d = 0,0025$, on obtient des valeurs de y^+ entre 35 et 45 sauf dans une zone très localisée immédiatement en aval de l'entrée, ce qui est dans la limite de validité de ce modèle.

La figure 5.5 présente des coupes axiales de vitesse à quatre valeurs du rayon: $r/R = 0, 0.5, 0.75$ et 0.94 (où $R = D/2 = 0.5$ est le rayon de la conduite). On y présente les résultats de la présente simulation, les résultats de la simulation de Martinuzzi et Pollard [28] et les mesures expérimentales de Barbin et Jones [29]. La comparaison avec les mesures expérimentales montre des résultats plutôt moyens. On reproduit des tendances assez similaires mais les valeurs sont relativement loin des points expérimentaux. On est par contre beaucoup plus près de la simulation de Martinuzzi et Pollard [28] (pour laquelle l'extraction de données n'est pas très précise). La résolution semble donc être correcte, mais le modèle de turbulence utilisé ne donne pas une très bonne représentation de la physique dans ce cas. Il faut dire que les mesures expérimentales comportent elles aussi des incertitudes non négligeables. Si on compare par exemple les données de Barbin et Jones [29] à celles de Richman et Azad [31] à $r = 0$, il y a des différences notables (figure 5.5).

La figure 5.6 présente le profil développé de l'énergie cinétique de la turbulence mise à l'échelle selon le cisaillement à la paroi τ_w (on présente $\frac{k}{\tau_w/\rho}$ en fonction de r/R). On utilise pour cela les résultats en sortie ($x/D = 80$) de la simulation. Ces résultats se comparent très bien à la simulation de Martinuzzi et Pollard [28]. Les écarts par rapport aux valeurs expérimentales sont par contre plus importants, mais on reproduit quand même l'allure générale. On surévalue l'énergie cinétique de la turbulence près de l'axe alors qu'on la sous-évalue près de la paroi.

Les figures 5.7 et 5.8 présentent les résultats et comparaisons de coupes de cisaillement turbulent $\tau_{turb} = \rho \overline{u'v'}$ (on considère la valeur absolue) mis à l'échelle selon le cisaillement à la paroi. Les résultats sont encore une fois très près de la simulation de Martinuzzi et Pollard [28], mais assez loin des valeurs expérimentales. La coupe à $x/D = 29$ semble illustrer qu'on a atteint le plein développement (distribution linéaire) plus rapidement que ne le prédit l'expérience.

Un moyen pour valider plus spécifiquement la loi de paroi est de vérifier la valeur du cisaillement à la paroi. D'après Pao [32], qui se base sur des données expérimentales, on a pour un écoulement turbulent développé dans une conduite circulaire à paroi lisse (dans la plage du nombre de Reynolds qui s'applique ici):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,8 + 2,0 \log_{10} (Re \sqrt{f}) \quad (5.1)$$

où $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ est le nomdre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne et le diamètre de la conduite, et f est le coefficient de friction défini par (on considère tout en valeur absolue):

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} \quad (5.2)$$

Dans ce cas-ci, on a $Re = 3,8 \times 10^5$ ce qui donne $f = 0,01384$ et $\tau_w = 1,73 \times 10^{-3}$.

On utilise deux méthodes pour extraire le cisaillement à la paroi de la simulation numérique. Tout d'abord, on peut récupérer la valeur issue de la loi de paroi qui est utilisée comme condition aux frontières (méthode 1):

$$\tau_w = \rho u_\tau u_* \quad (5.3)$$

On peut aussi récupérer le cisaillement de la solution numérique (méthode 2):

$$\tau_w = (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{paroi} \quad (5.4)$$

Dans les deux cas, on extrait les données en sortie ($x/D = 80$). Le tableau 5.1 résume les résultats. On constate que les résultats numériques sont excellents à ce niveau. On note un écart de l'ordre de 1 % entre les résultats numériques et la référence expérimentale de Pao [32].

source	cisaillement
expérimental (Pao [32])	$1,73 \times 10^{-3}$
numérique (méthode 1)	$1,746 \times 10^{-3}$
numérique (méthode 2)	$1,710 \times 10^{-3}$

Tableau 5.1: Cisaillement à la paroi dans la zone pleinement développée

On peut aussi examiner ce qui se produit au niveau du gradient de pression dans la zone pleinement développée. On fait l'équilibre des forces pour déterminer le gradient de pression correspondant au cisaillement à la paroi, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \pi R^2 \frac{dp}{dx} &= 2\pi R \tau_w \\ \frac{dp}{dx} &= \frac{2\tau_w}{R} \end{aligned} \quad (5.5)$$

soit dans le cas présent:

$$\frac{dp}{dx} = 6,92 \times 10^{-3} \quad (5.6)$$

où l'on considère la valeur absolue du gradient de pression.

Les résultats numériques donnent une distribution de pression qui n'est pas parfaitement nette et régulière et il n'y a pas un endroit plus approprié que les autres pour déterminer la valeur du gradient. On tire une valeur moyenne de $\frac{dp}{dx}$ de $7,04 \times 10^{-3}$ en l'évaluant en plusieurs endroits près de la sortie. On est à nouveau en très bon accord avec la valeur expérimentale, avec un écart de moins de 2 %. Les

résultats numériques sont donc cohérents puisqu'il préservent l'équilibre des forces dans cette zone développée. Le résolveur est conservatif à ce niveau.

À titre comparatif, Barbin et Jones [29], d'après leur graphique de la distribution de pression, obtiennent environ $\frac{dp}{dx} \approx 6,50 \times 10^{-3}$.

On peut aussi examiner l'évolution du cisaillement à la paroi entre l'entrée et la sortie. La figure 5.9 compare les résultats numériques aux valeurs expérimentales de Barbin et Jones [29]. On y donne la valeur du cisaillement à la paroi rapporté au cisaillement dans la région pleinement développée. Les résultats de la simulation passent par un minimum inférieur à un (un cisaillement inférieur au cisaillement développé) ce qui n'est pas prédit par l'expérience. Les résultats expérimentaux de Richman et Azad [31] ne présentent pas non plus ce comportement. Par contre, les simulations numériques de Benim et Zinser [33] prédisent ce sous-dépassement.

En conclusion, la résolution de ce problème a montré que la loi de paroi donnait de très bons résultats. Les résultats obtenus se comparent très bien à d'autres simulations numériques d'où on peut conclure que le résolveur se comporte bien. Par contre, on observe des différences notables par rapport aux valeurs expérimentales. Il faut dire que les valeurs expérimentales ne sont pas d'une précision absolue et que d'ailleurs elles diffèrent selon les auteurs. Il ne faut pas oublier non plus que le modèle de turbulence $k - \epsilon$ est justement un modèle. Il ne représente pas exactement la réalité. Les lois de paroi et les conditions d'entrée constituent d'autres sources d'erreurs.

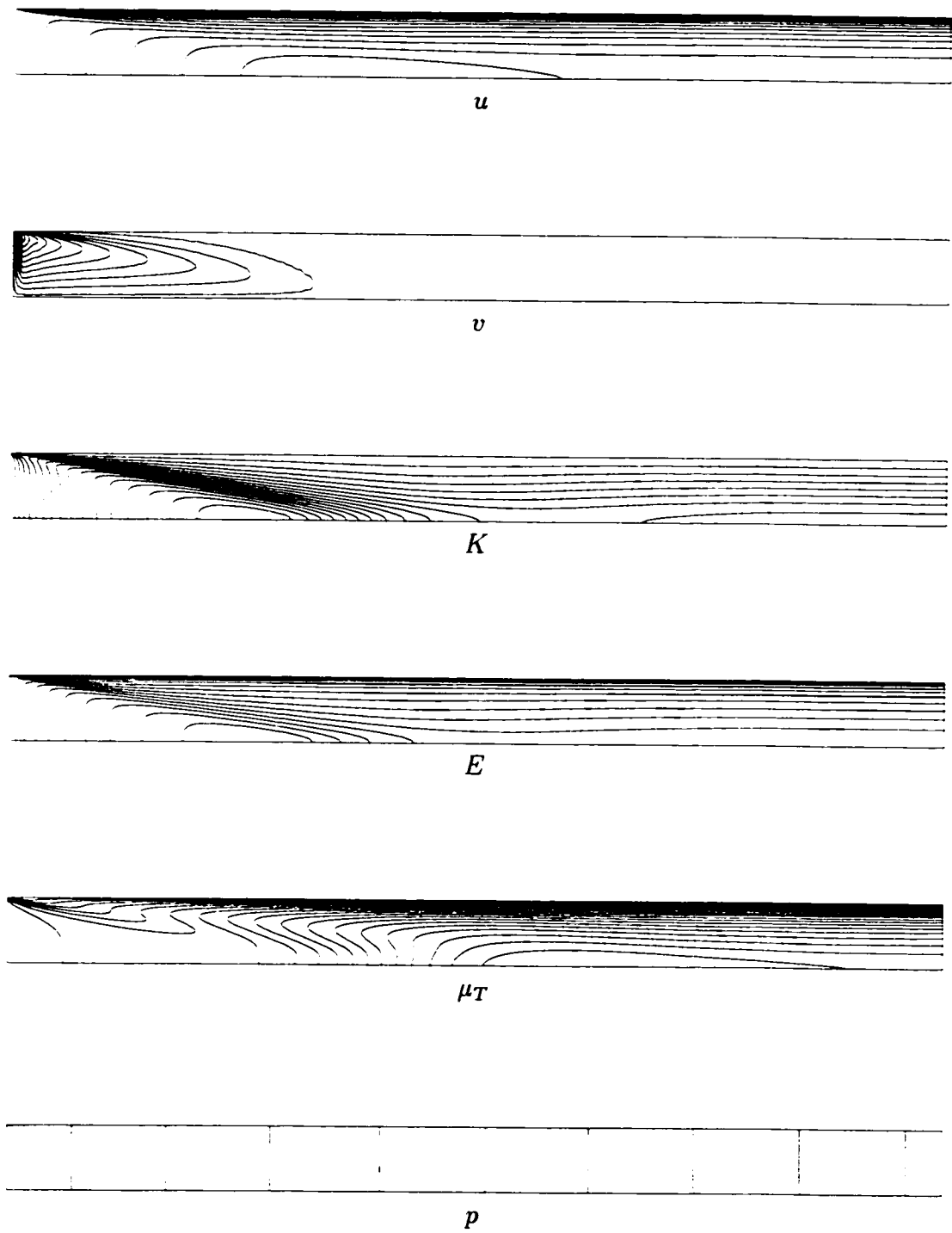


Figure 5.3: Solution de l'écoulement dans une conduite

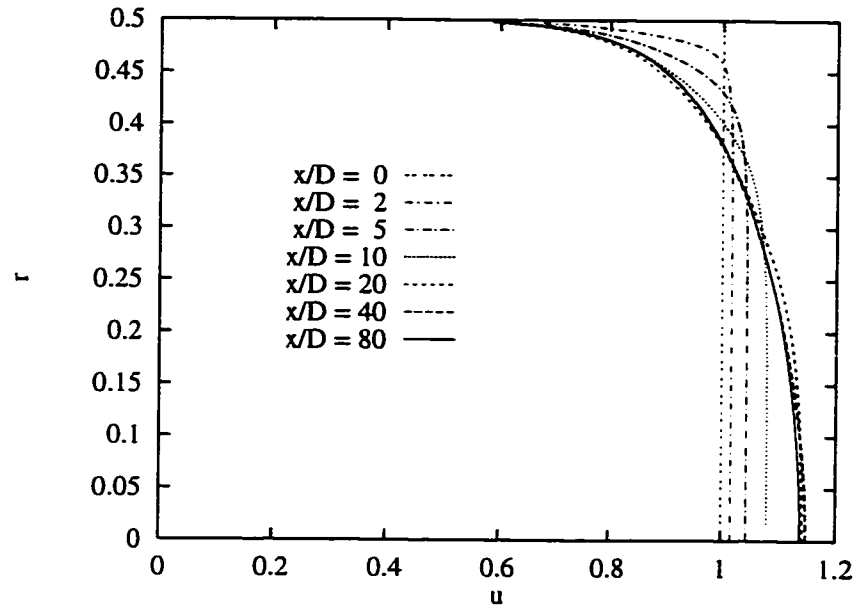


Figure 5.4: Profils de vitesse axiale pour l'écoulement dans une conduite

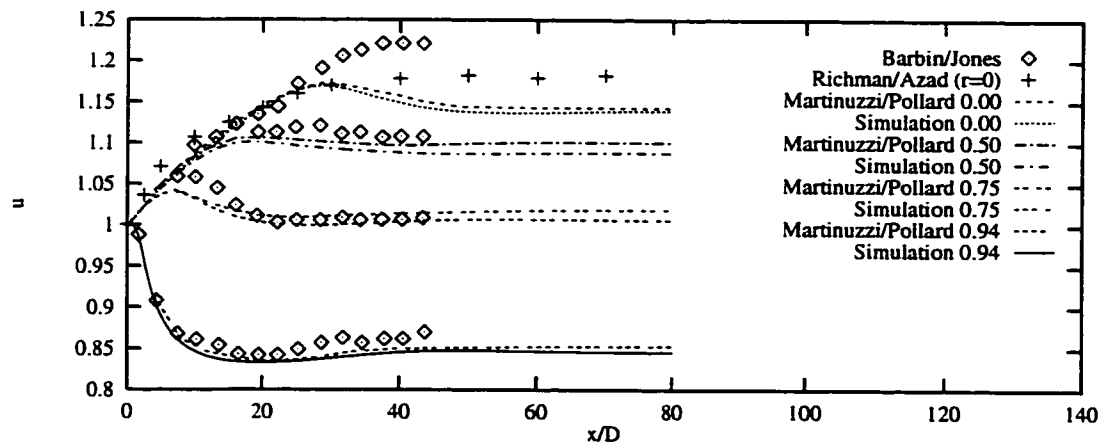


Figure 5.5: Coupes axiales de la vitesse axiale pour l'écoulement dans une conduite

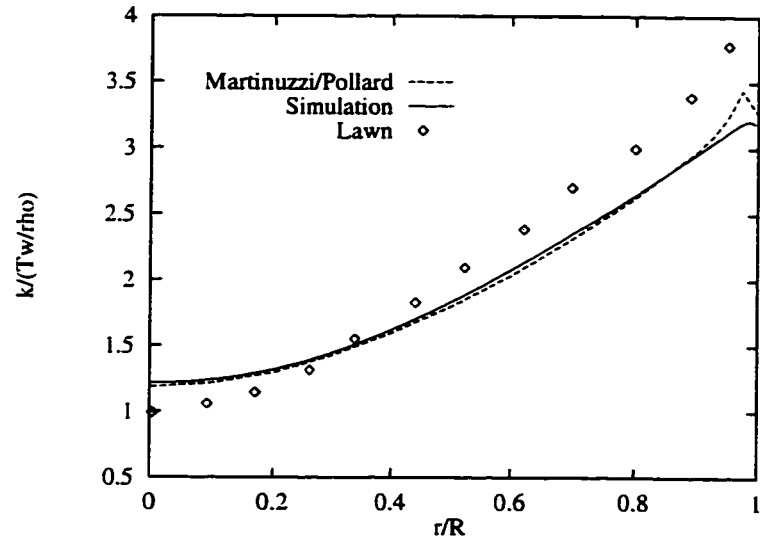


Figure 5.6: Profil développé de k pour l'écoulement dans une conduite

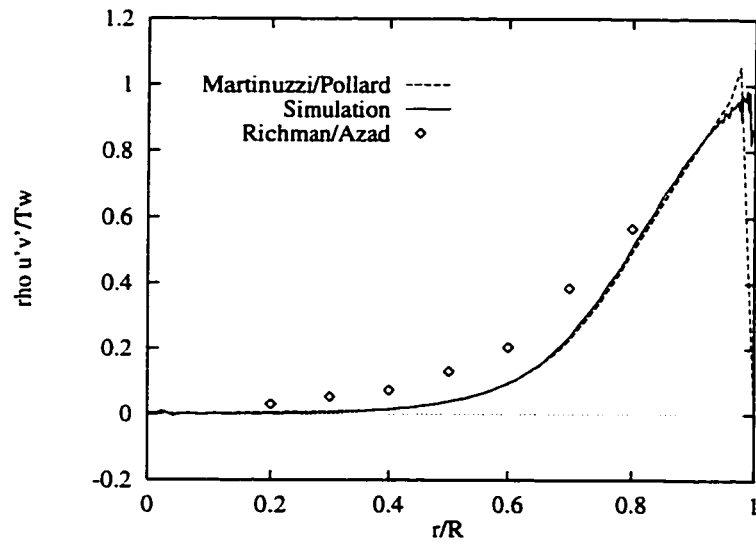


Figure 5.7: Coupe du cisaillement turbulent à $x/D = 10$ pour l'écoulement dans une conduite

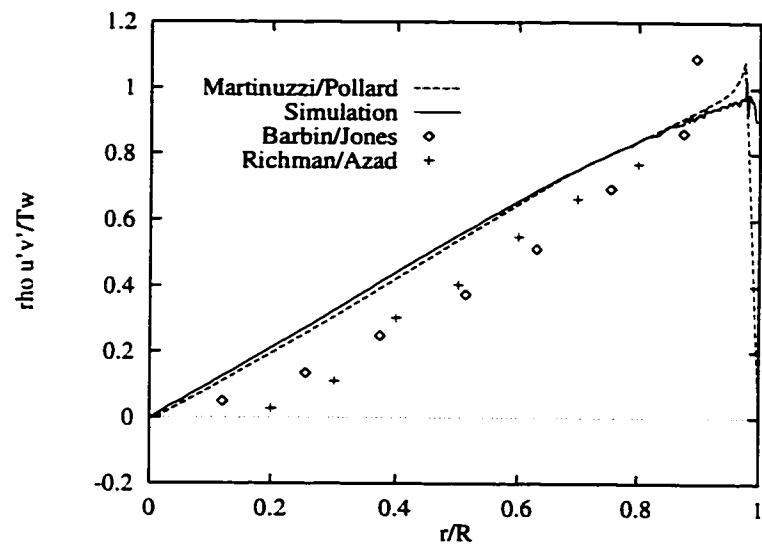


Figure 5.8: Coupe du cisaillement turbulent à $x/D = 29$ pour l'écoulement dans une conduite

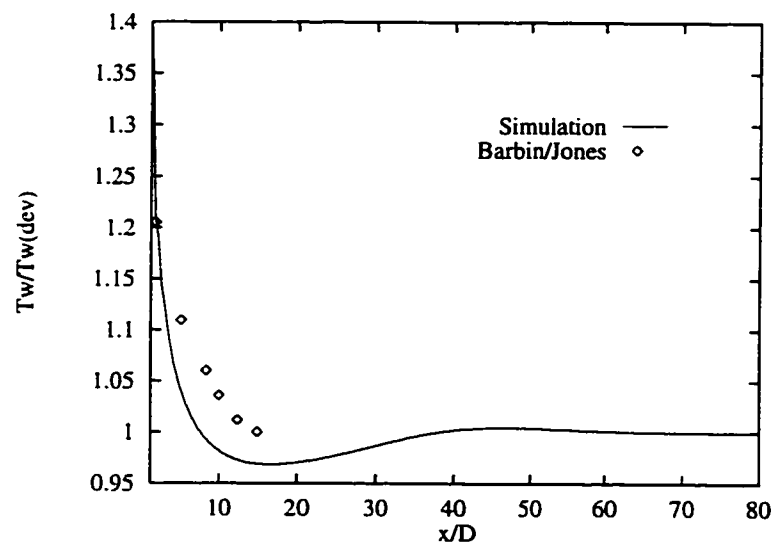


Figure 5.9: Évolution du cisaillement à la paroi pour l'écoulement dans une conduite

5.2 Expansion brusque dans une conduite circulaire

Le problème considéré dans cette section est celui d'un écoulement turbulent dans une conduite circulaire avec expansion brusque (90°). Le rapport des diamètres des deux cylindres est de deux. Ce problème de base est fréquemment rencontré en ingénierie. Il contient en outre des caractéristiques physiques très importantes telles une zone de recirculation, un écoulement séparé puis rattaché, une forte couche cisailée et des conditions très sévères au niveau du coin de l'expansion. Des mesures expérimentales sont disponibles pour ce problème: on utilise celles de Chaturvedi [34].

La géométrie et les conditions aux frontières utilisées sont présentées à la figure 5.10 qui n'est pas à l'échelle. Les coordonnées fournies tiennent compte du déplacement des frontières où l'on utilise une loi de paroi. Plusieurs choix demeurent arbitraires et incertains. Bien qu'on possède certaines mesures expérimentales, les conditions exactes d'entrée ne sont pas disponibles, ni d'ailleurs la géométrie en amont de l'expansion. On sait par contre que le niveau de l'énergie cinétique de la turbulence près de l'expansion est très faible et que le profil de vitesse y est pratiquement uniforme. On choisit donc d'ajouter une section d'entrée en amont de l'expansion qui n'est pas trop longue pour éviter que le profil de vitesse ne se développe trop. On impose un profil de vitesse uniforme à l'entrée. Les valeurs de k et ϵ sont supposées constantes en entrée et peuvent s'ajuster un peu dans la section avant l'expansion. Le choix de ces valeurs demeure discutable. Il y a dans ce cas trois parois solides distinctes et comme elles sont toutes horizontales ou verticales,

on n'impose pas de condition de tangence faible mais directement $u = 0$ ou $v = 0$. On choisit pour le coin de l'expansion de laisser u s'ajuster selon la loi de paroi (de la paroi 1) et non de le fixer à zéro (selon la paroi 2).

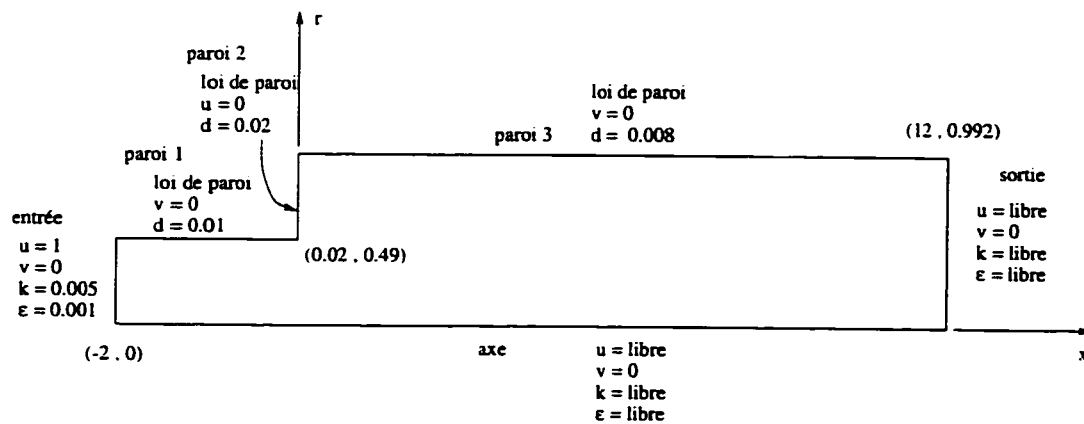


Figure 5.10: Géométrie et conditions aux limites pour l'expansion brusque

Le problème est résolu de façon adimensionnelle. La vitesse de référence est la vitesse uniforme en entrée et la longueur de référence est le diamètre du cylindre en amont. Le nombre de Reynolds correspondant est de $Re = 2 \times 10^5$.

On utilise ici la formulation GLS pour le mouvement et SUPG-incomplet pour les équations de transport de K et E . Les estimateurs d'erreur de toutes les variables sont utilisés par l'opérateur de transition, même la pression. La pression aide entre autre à percevoir l'erreur en entrée (près de la paroi) mais on l'a éliminée pour la génération du dernier cycle puisque son niveau d'erreur était beaucoup plus faible que pour les autres variables et qu'il semblait générer des poches dans le maillage. Le dernier cycle est résolu avec la méthode SUPG pour le mouvement, pour des raisons de convergence.

Le tableau 5.2 présente l'évolution de la dimension des maillages avec le facteur de réduction d'erreur exigé pour le cycle adaptatif suivant. On y donne aussi la longueur de la zone de recirculation obtenue. On voit que cette longueur de recirculation semble se stabiliser et donc qu'on a presque atteint l'indépendance au maillage et la convergence vers la solution exacte au problème posé.

cycle	nombre de noeuds	nombre d'éléments	longueur de recirculation	réduction commandée
0	961	420	2,676	0,5
1	1943	898	4,253	0,6
2	3184	1495	4,679	0,5
3	6788	3249	4,652	0,5
4	13258	6385	4,692	0,65
5	20270	9755	4,696	—

Tableau 5.2: Évolution des maillages et de la longueur de la zone de recirculation pour l'expansion brusque

La figure 5.11 présente la séquence de maillages générée par le processus adaptatif. On remarque que le premier maillage est très grossier, avec seulement deux éléments sur la hauteur de la section en amont de l'expansion. Le maillage final est par contre très raffiné et possède des gradients de taille très prononcés mais qui s'effectuent proprement. On peut en quelque sorte deviner la solution simplement en examinant ce maillage. On voit d'ailleurs à la figure 5.12 un agrandissement de ce maillage près du coin. Le niveau de raffinement sur le coin est très important. Il y a en fait pratiquement une singularité dans la solution à cet endroit, de sorte que l'erreur perçue y est toujours grande même en raffinant. C'est la seule zone où on n'atteint pas vraiment la convergence globale. Il faut même à la limite imposer une

taille minimum à ne pas dépasser pour éviter un raffinement trop important dans cette zone, ce raffinement étant presque inutile et très gourmand en ressources. On peut aussi remarquer qu'on a limité la taille des éléments à un maximum pour éviter qu'ils se soient trop gros même si l'estimation d'erreur le commande. Cette taille maximale est de 0,25 et on voit clairement les zones limitées par cette taille.

La figure 5.13 illustre de manière plus visuelle l'évolution de la longueur de la zone de recirculation. On voit qu'on atteint assez rapidement des valeurs près de la solution finale et que les derniers cycles sont relativement stabilisés à ce niveau. La valeur expérimentale de la longueur de la zone de recirculation [34] est d'environ 4,6 comparativement à 4,7 pour la simulation, soit une erreur de 2 %. On est donc très près de cette solution expérimentale, surtout si on tient compte de l'incertitude associée à ces mesures. Le modèle de turbulence semble donc très bien se comporter à ce niveau. Nallasamy [35] fait une revue des différentes simulations sur divers problèmes et une analyse des modèles de turbulence. Il y note que dans le cas de l'expansion brusque axisymétrique, par opposition à la marche dans un repère cartésien, le modèle $k - \epsilon$ standard prédit effectivement la longueur de la zone de recirculation à l'intérieur des incertitudes expérimentales. Il se base sur les résultats numériques de plusieurs auteurs pour formuler une telle affirmation.

Les figures 5.14 et 5.15 illustrent la solution initiale (cycle 0) et finale (cycle 5) sous forme de lignes d'isovaleurs des quantités d'intérêt. Le premier maillage est très grossier de sorte que la solution n'est pas précise. Elle donne cependant une bonne indication de ce qu'est la vraie solution et fournit déjà de l'information au niveau des zones où l'erreur est importante et où il faut donc raffiner d'avantage. L'utilisation des variables logarithmiques aide grandement à la résolution sur un tel

maillage grossier.

La solution sur le dernier cycle est pour sa part très nette. On voit aussi que le maillage est très bien adapté à la solution. Il a tendance à être beaucoup plus raffiné lorsque les isolignes sont très concentrées, soit lorsqu'on est en présence de très forts gradients. On a ainsi un raffinement important près des parois solides et dans la couche cisailée émanant au coin de l'expansion. On voit très bien que le maillage s'est adapté aux deux faisceaux d'isolignes très concentrées de K et E qui débutent au coin: le premier faisceau, plus long, se dirige vers le bas et l'autre, plus court, vers le haut. On peut enfin mentionner que la solution n'est pas parfaitement développée en sortie, surtout au niveau des quantités de turbulence. Il pourrait être souhaitable d'allonger le domaine, quoique des essais sommaires ont démontré que la solution ne s'en trouvait presque pas affectée.

Les figures 5.16 à 5.21 présentent les coupes de vitesse axiale u à différentes positions. On y montre l'évolution de ces profils au cours des cycles adaptatifs de même que les valeurs expérimentales de Chaturvedi [34]. Deux ensembles de points expérimentaux sont fournis: le premier contient les vitesses telles que mesurées alors que le deuxième correspond aux valeurs corrigées par l'auteur (à l'aide d'un certain lissage générant une distribution de vitesse continue selon r au lieu de simples valeurs ponctuelles). En général, les résultats de la simulation collent assez bien avec les mesures expérimentales. D'ailleurs, on peut voir qu'il y a des écarts parfois importants entre les deux types de résultats expérimentaux, ce qui signifie que leur niveau de précision n'est pas très élevé. On constate qu'on surévalue la vitesse près de l'axe dans les premières coupes. Cette vitesse est en fait trop élevée au niveau de l'expansion. Cela peut être dû au choix de la longueur d'entrée: avec une entrée

plus courte, on aurait une vitesse plus faible car elle se serait moins développée avant l'expansion. Il semble aussi que ce soit au niveau de l'expansion qu'on ait une trop grande accélération due à une trop forte réaction au niveau du coin (ce qui se voit aussi par les isolignes de v). Cette surévaluation près de l'axe se poursuit dans les stations de coupe suivantes. Il est important de noter que les coupes varient beaucoup pour les premiers cycles d'adaptation, mais qu'elles se stabilisent dans les derniers cycles. On voit en effet qu'il n'y a presque plus d'écarts dans les derniers cycles, ce qui semble confirmer qu'on est à toute fin pratique convergé par rapport au maillage.

Les figures 5.22 à 5.25 présentent les coupes de l'énergie cinétique de la turbulence k (et non la variable logarithmique K). Les valeurs expérimentales disponibles ne sont que sur les quantités $\overline{u'^2}$ et $\overline{v'^2}$. On approxime alors l'énergie cinétique de la turbulence par:

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + 2\overline{v'^2}) \quad (5.7)$$

selon la recommandation de Chaturvedi [34] qui suppose $\overline{v'^2} = \overline{w'^2}$.

On constate cette fois que les résultats sont près des valeurs expérimentales à $x = 1$ mais qu'ils se détériorent par la suite. On reproduit des formes similaires, mais on a tendance à surévaluer k , possiblement à cause d'un trop grand terme de production. Il est tout à fait normal d'avoir plus de difficulté à reproduire les résultats expérimentaux sur les variables de turbulence que sur la vitesse. On remarque à nouveau une stabilisation dans les derniers cycles, d'où une certaine convergence globale. On note par contre des écarts plus prononcés entre le premier et le dernier cycle, comparativement à ce qu'on observe sur la vitesse u .

Les figures 5.26 à 5.29 présentent les coupes du cisaillement turbulent. Le com-

portement des résultats numériques par rapport aux valeurs expérimentales ressemble à ce qu'on a pour k . La prédiction à $x = 1$ est très bonne, mais on surévalue grandement aux autres stations de coupe. La forme de la distribution et même la position du maximum correspondent assez bien cependant. Cette surévaluation du cisaillement turbulent est due à une surévaluation de la viscosité turbulente et de $\frac{\partial u}{\partial r}$ (que l'on peut constater aux figures 5.20 et 5.21 en particulier). On note encore une fois que les distributions du cisaillement turbulent sont très irrégulières pour les premiers cycles mais qu'on semble converger vers une solution finale en raffinant le maillage. Il n'y a presque plus de corrections sur les derniers cycles.

Globalement, on réussit donc à bien représenter la physique assez complexe et variée de ce cas: zone de recirculation, couche cisailée, point presque singulier, présence de parois solides, etc... On observe par contre des écarts parfois importants au niveau des comparaisons locales avec les mesures expérimentales, particulièrement sur les quantités de turbulence. Il faut rappeler que le but ici n'est pas de développer un modèle de turbulence, mais plutôt de vérifier son comportement par rapport aux mesures expérimentales et surtout de s'assurer qu'on a un résolveur robuste qui, combiné à un processus de remaillage adaptatif, permet de s'approcher très près de la solution exacte des équations.

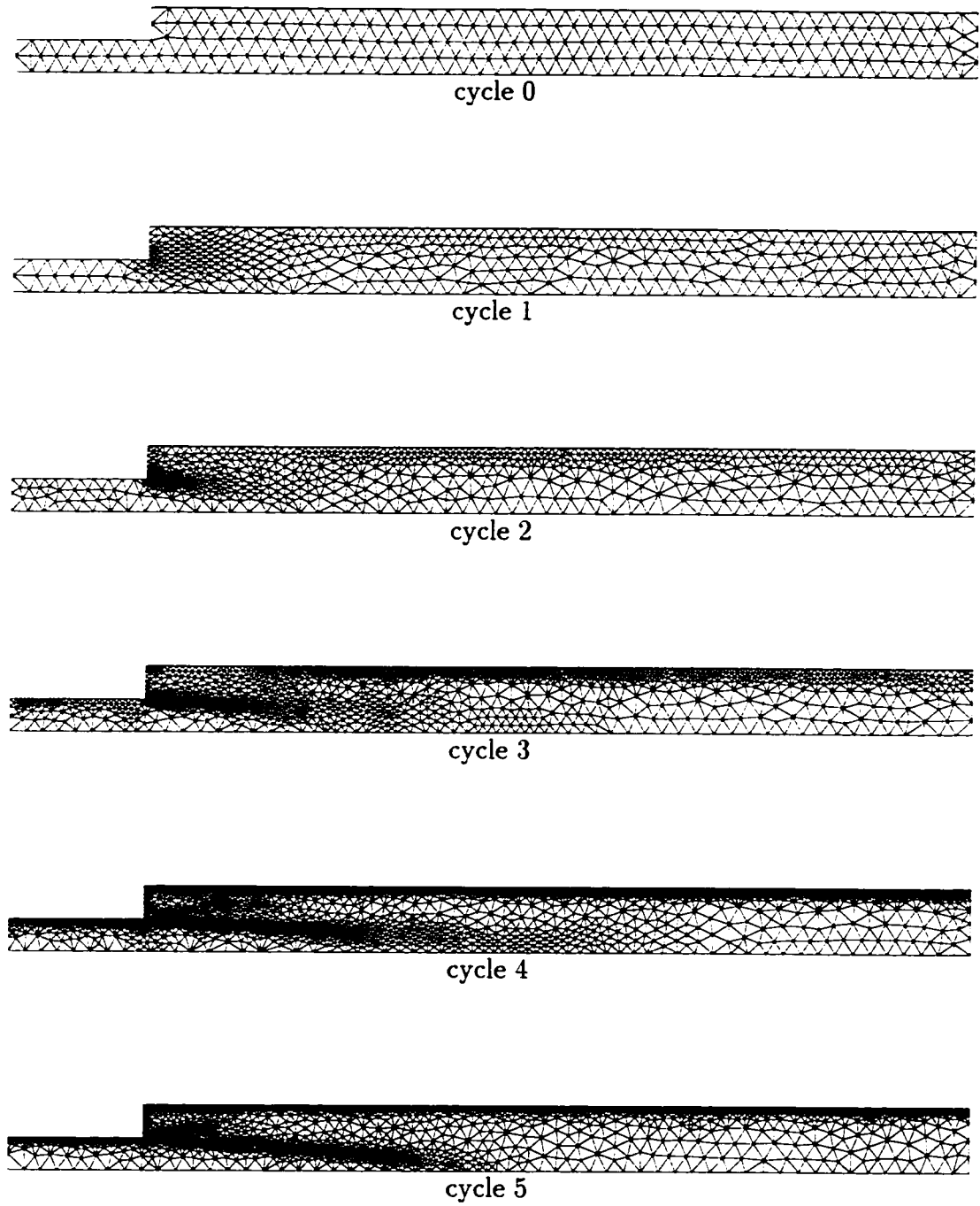


Figure 5.11: Séquence de maillages pour l'expansion brusque

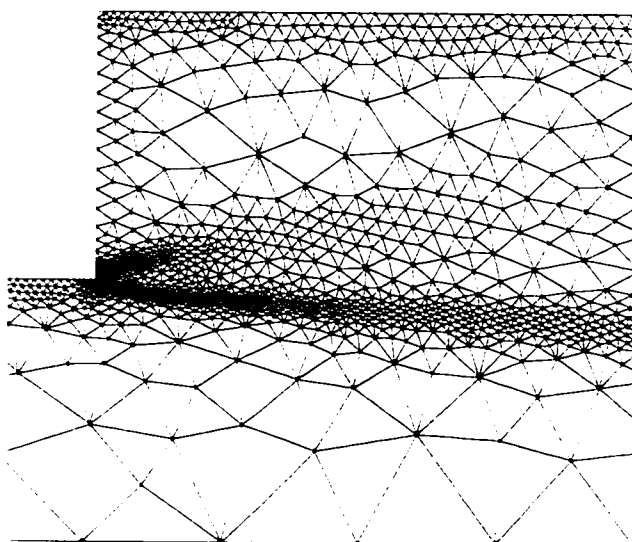


Figure 5.12: Agrandissement du maillage 5 de l'expansion brusque

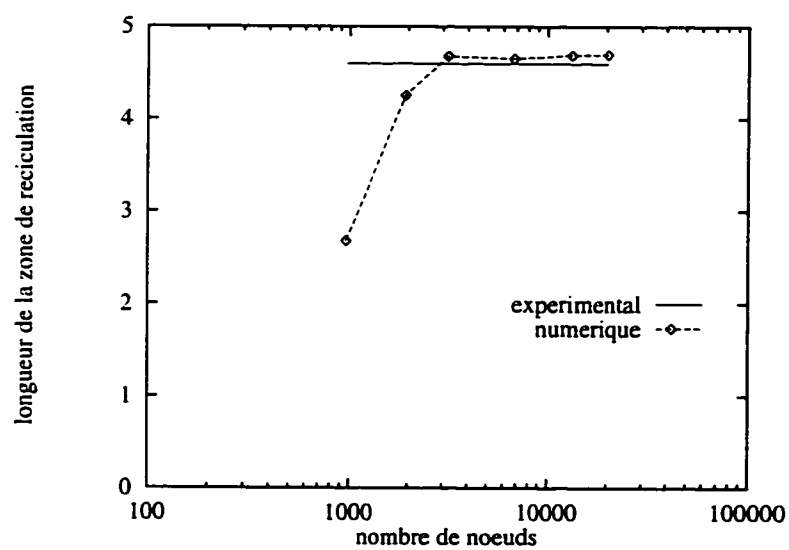


Figure 5.13: Trajectoire de la longueur de la zone de recirculation pour l'expansion brusque

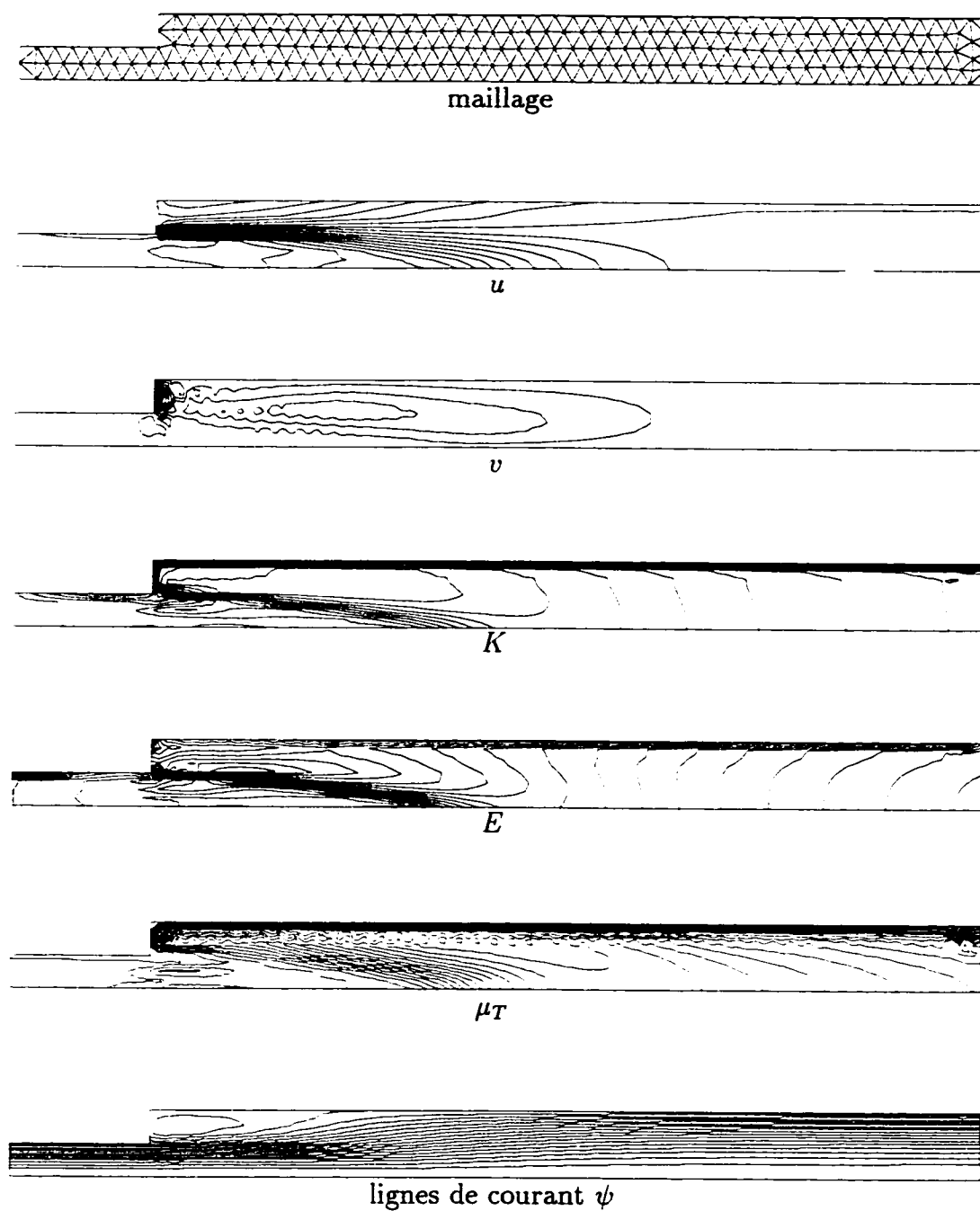


Figure 5.14: Solution sur le maillage initial pour l'expansion brusque

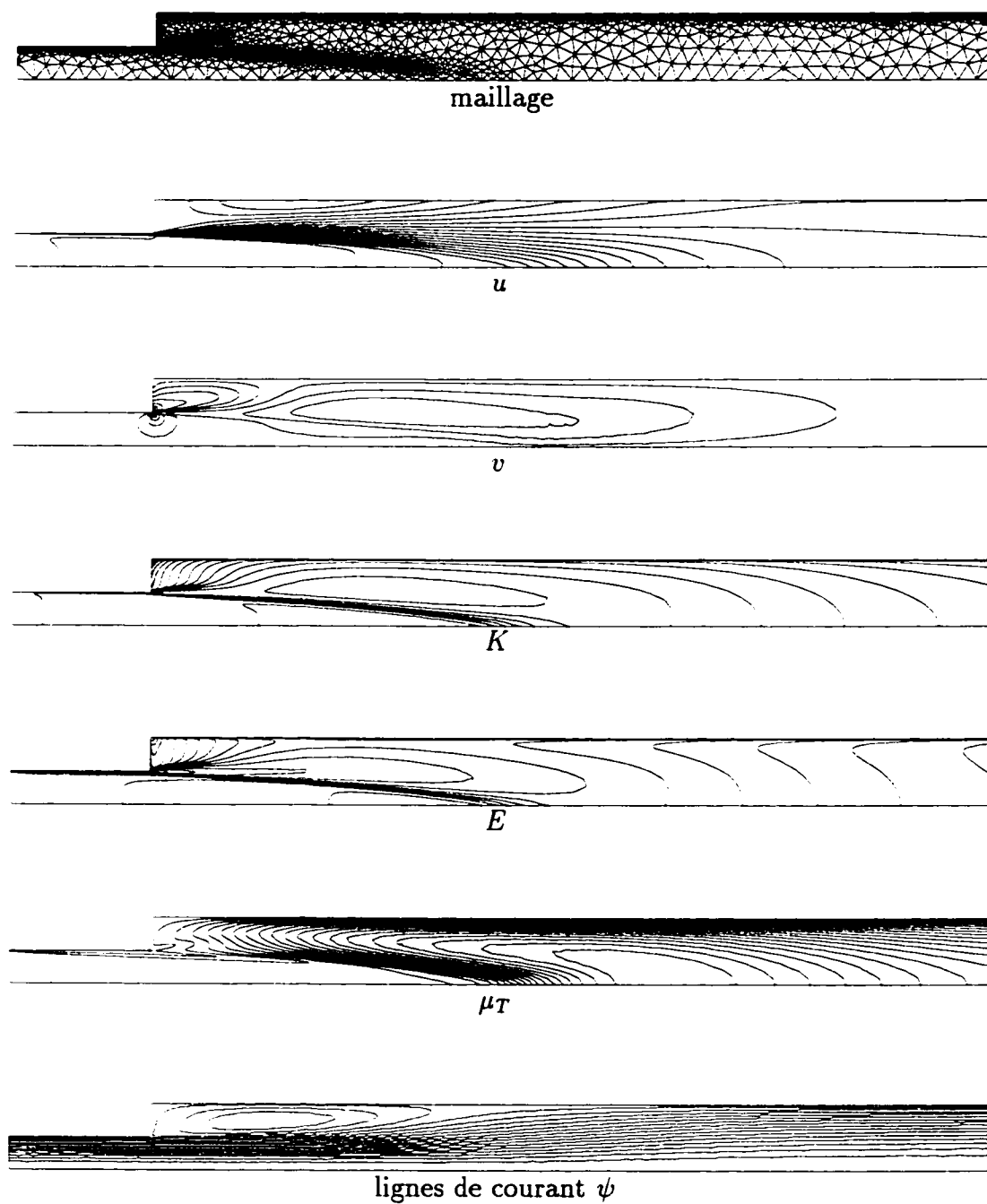


Figure 5.15: Solution sur le maillage final pour l'expansion brusque

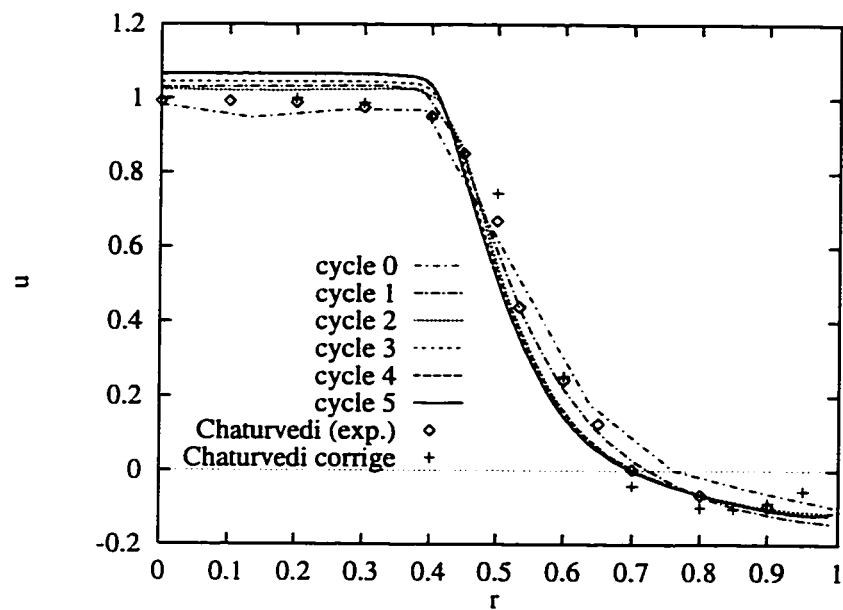


Figure 5.16: Coupes de vitesse axiale à $x = 1$ pour l'expansion brusque

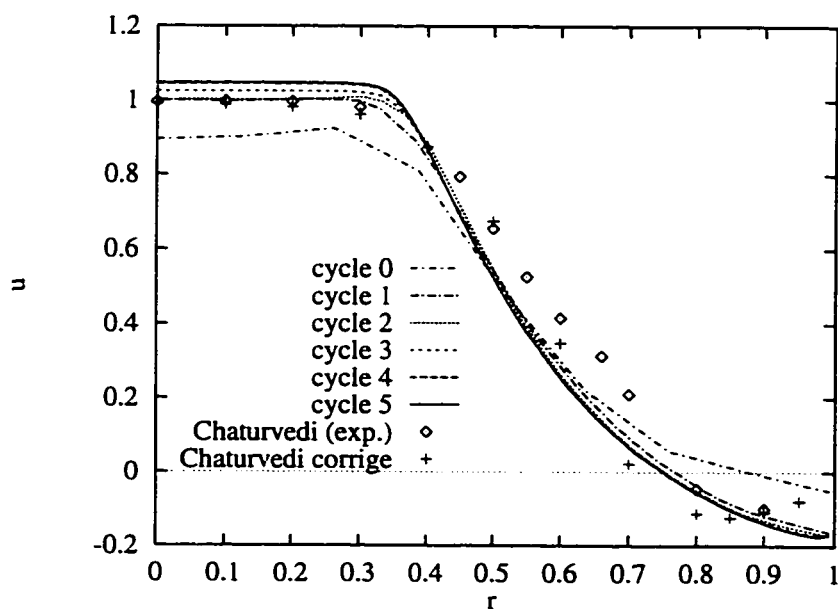


Figure 5.17: Coupes de vitesse axiale à $x = 2$ pour l'expansion brusque

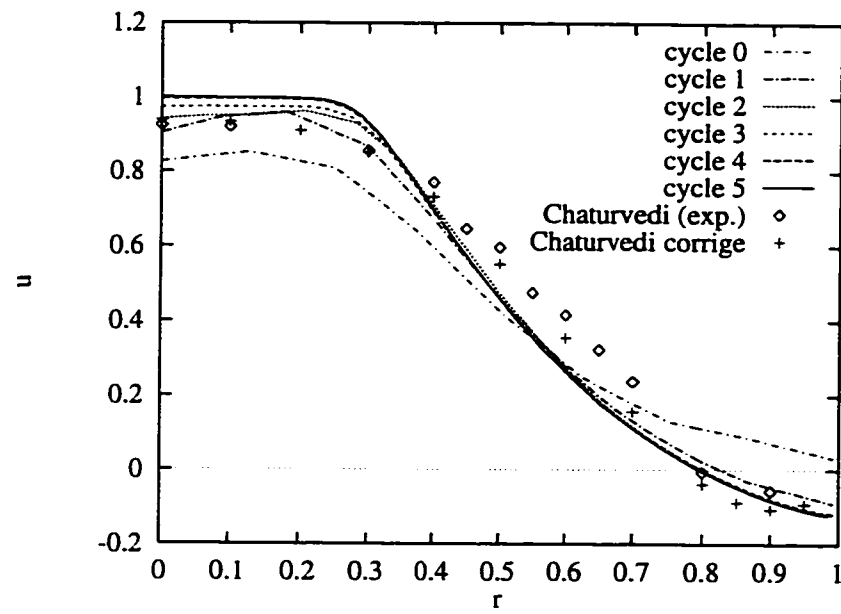


Figure 5.18: Coupes de vitesse axiale à $x = 3$ pour l'expansion brusque

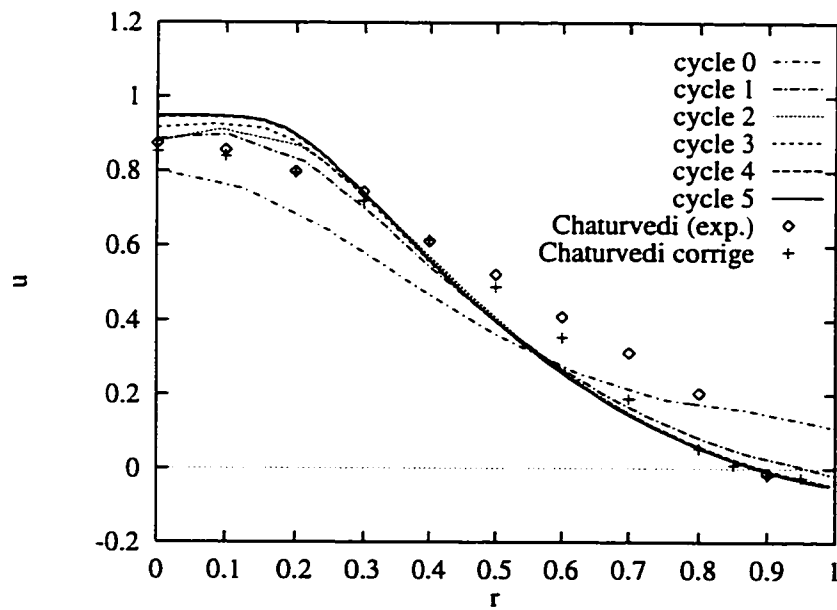


Figure 5.19: Coupes de vitesse axiale à $x = 4$ pour l'expansion brusque

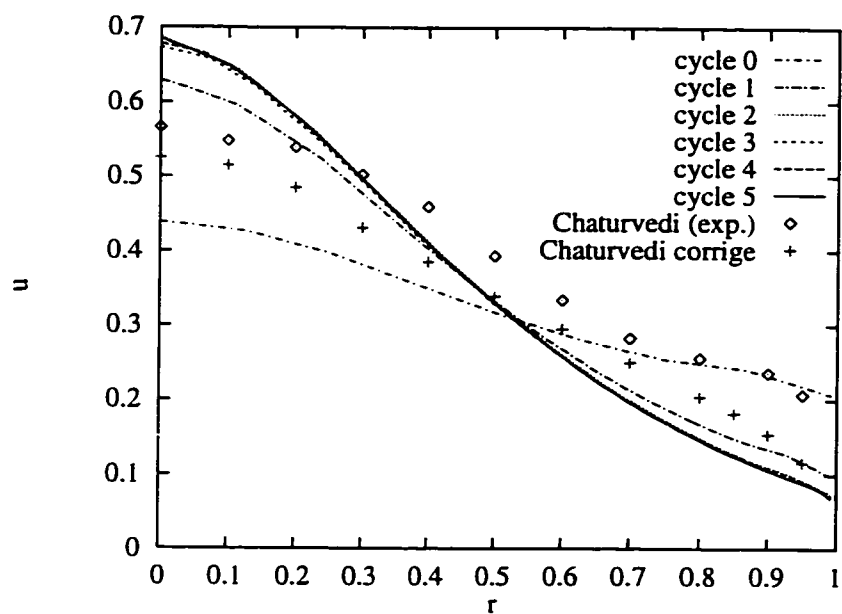


Figure 5.20: Coupes de vitesse axiale à $x = 6$ pour l'expansion brusque

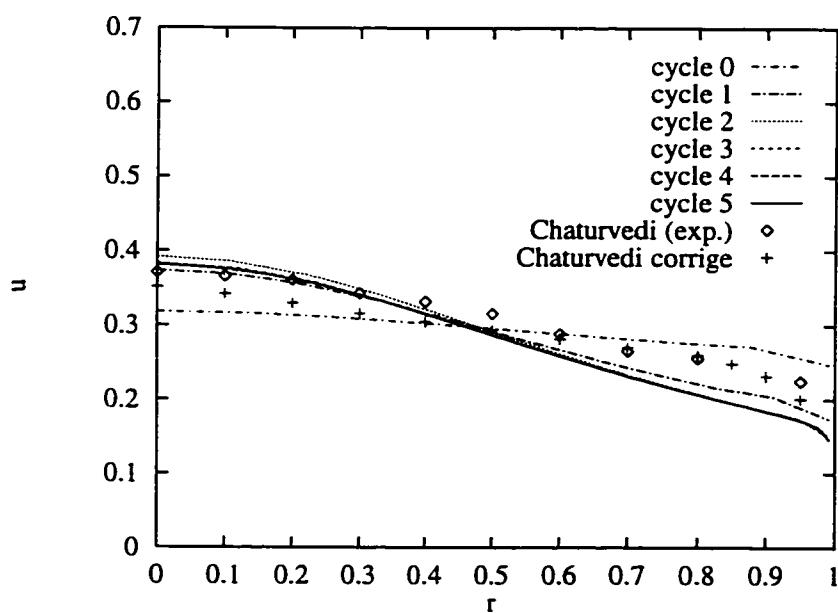


Figure 5.21: Coupes de vitesse axiale à $x = 8$ pour l'expansion brusque

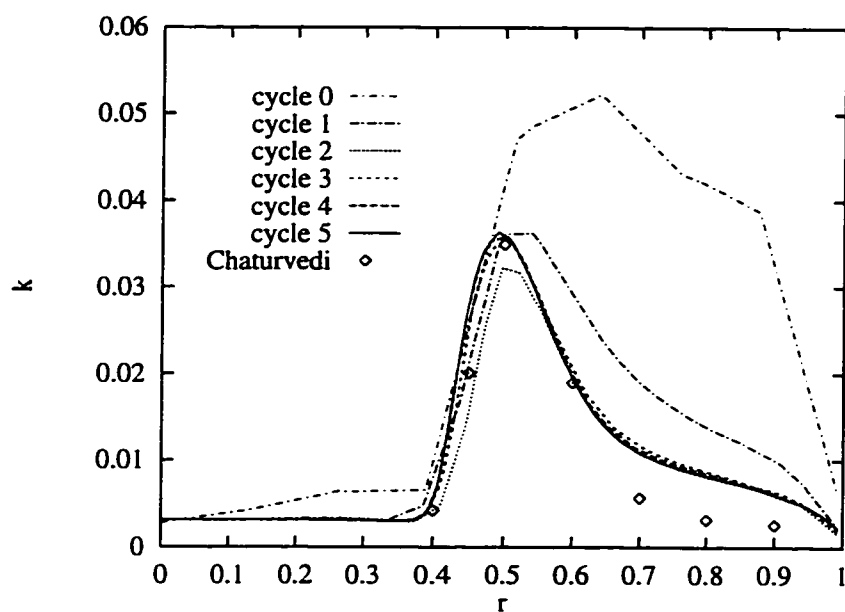


Figure 5.22: Coupes de k à $x = 1$ pour l'expansion brusque

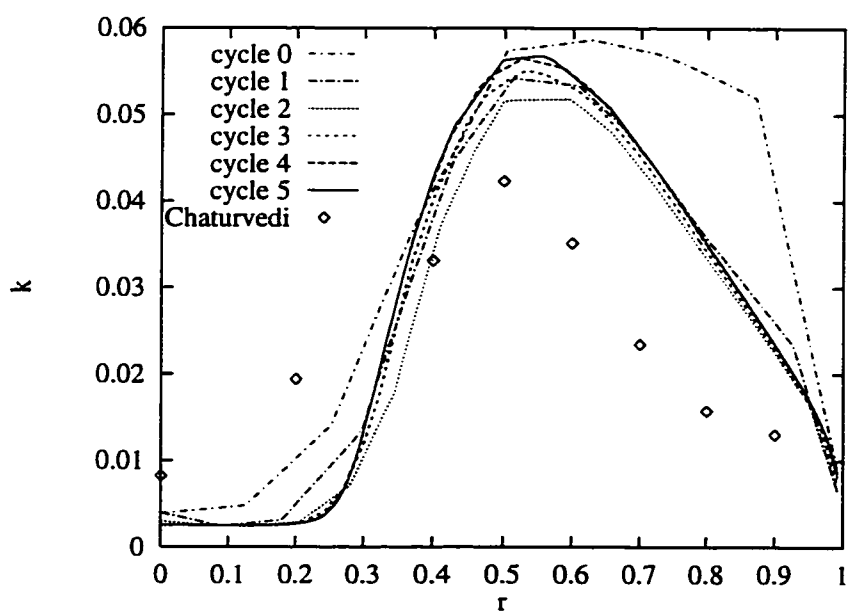


Figure 5.23: Coupes de k à $x = 3$ pour l'expansion brusque

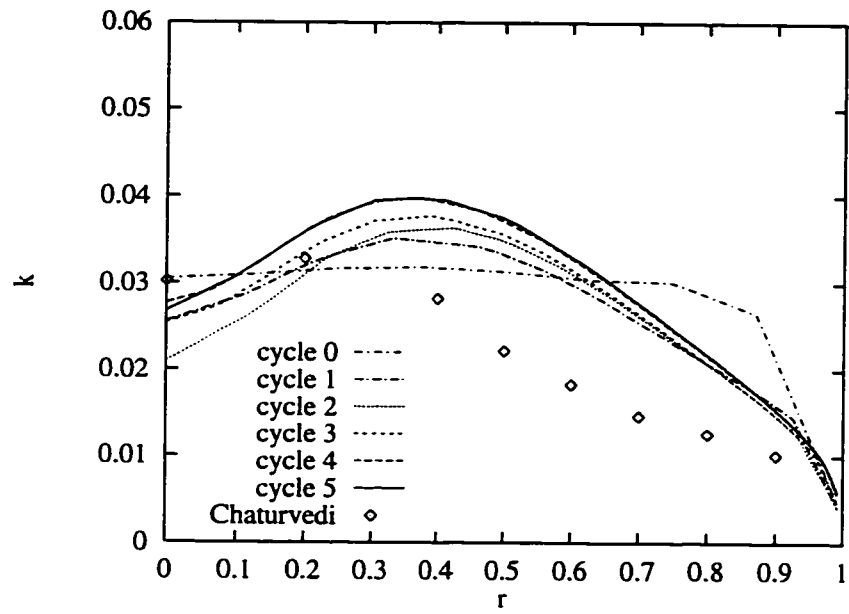


Figure 5.24: Coupes de k à $x = 6$ pour l'expansion brusque

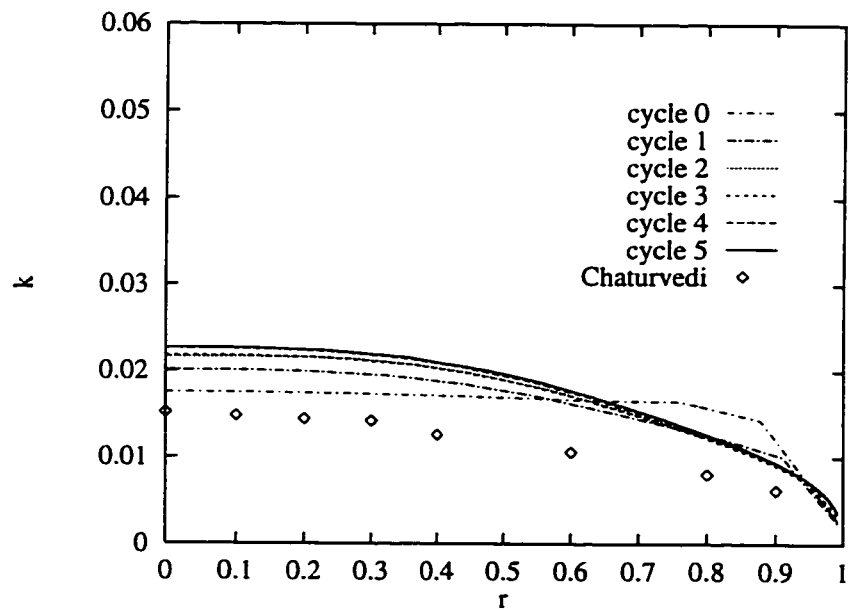


Figure 5.25: Coupes de k à $x = 8$ pour l'expansion brusque

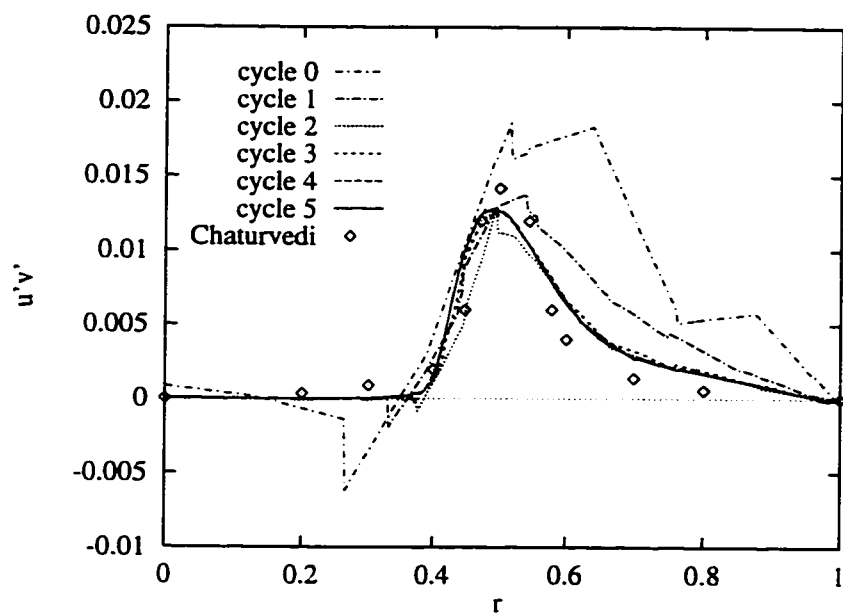


Figure 5.26: Coupes de $\overline{u'v'}$ à $x = 1$ pour l'expansion brusque

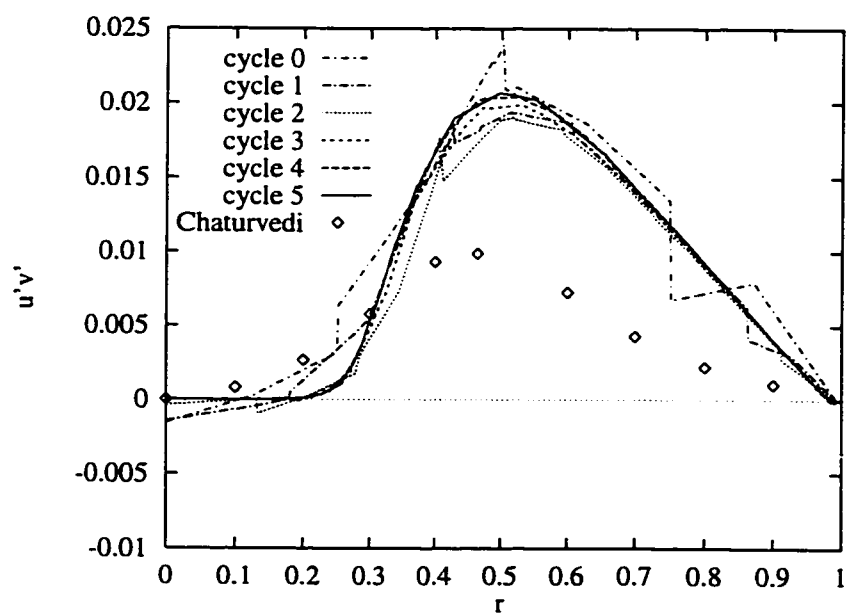


Figure 5.27: Coupes de $\overline{u'v'}$ à $x = 3$ pour l'expansion brusque

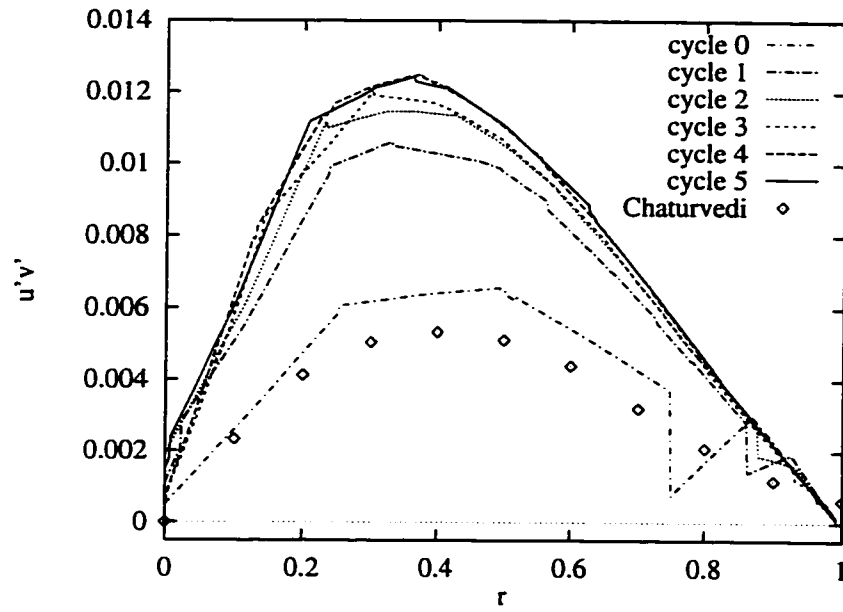


Figure 5.28: Coupes de $\overline{u'v'}$ à $x = 6$ pour l'expansion brusque

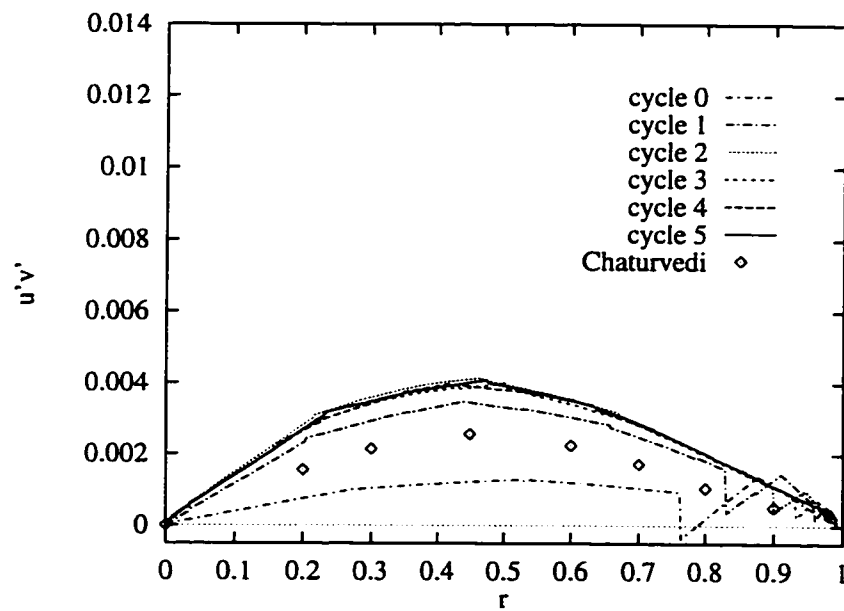


Figure 5.29: Coupes de $\overline{u'v'}$ à $x = 8$ pour l'expansion brusque

5.3 Diffuseurs

Cette section traite de problèmes dans la famille des diffuseurs. Ces cas permettent dans un premier temps de valider la loi de paroi générale pour une paroi inclinée, avec l'utilisation d'une condition de tangence. On peut aussi procéder à des analyses paramétriques au niveau de l'influence de l'angle du diffuseur. L'étude la plus importante dans cette section est cependant au niveau des diverses formulations éléments finis avec l'effet de l'adaptativité. La référence pour les mesures expérimentales est celle de Chaturvedi [34] qui fournit des données pour des diffuseurs à 15° , 30° , 45° et 90° .

La figure 5.30 illustre de façon générique la géométrie du problème et les conditions aux limites pour les trois premiers diffuseurs. On a déjà présenté ces données pour le diffuseur à 90° à la section 5.2. Par rapport à ce dernier cas, on a simplement raccourci l'entrée et on doit maintenant utiliser une loi de paroi complète avec condition de tangence sur la paroi 2. L'angle du diffuseur est illustré par θ sur la figure. On utilise $Re = 2 \times 10^5$ dans tous les cas.

5.3.1 Diffuseur à 15°

Le tableau 5.3 présente le choix des distances à la paroi d_i pour ce cas. Les résultats de la résolution de ce problème, peu importe la formulation utilisée, ne contiennent aucune zone de recirculation. L'écoulement ne se sépare pas au niveau du coin mais ne fait que le contourner. Les mesures expérimentales de Chaturvedi [34] dénotent pourtant la présence d'une telle zone de recirculation, qui a une longueur

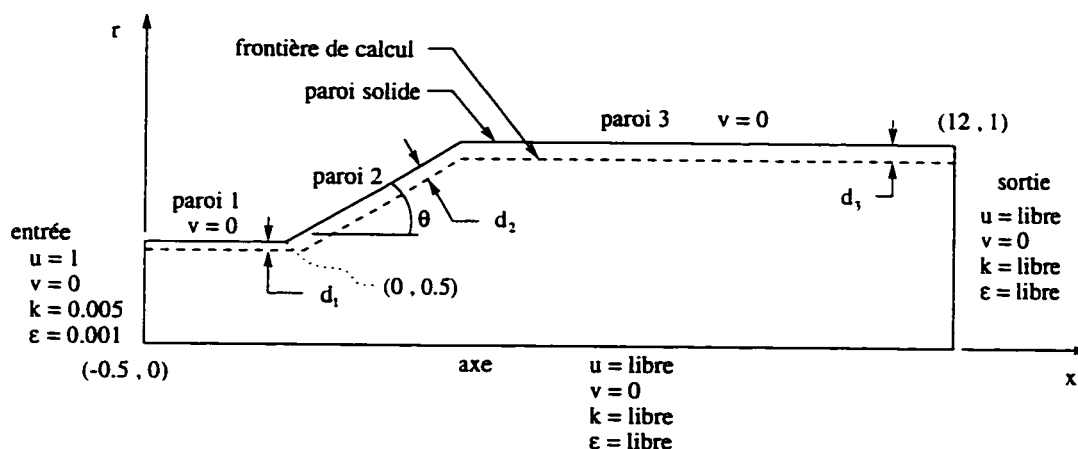


Figure 5.30: Géométrie et conditions aux limites pour les diffuseurs

approximative de 3,3. La prédiction est donc très mauvaise pour ce cas. Il faut dire que comparativement à l'expansion brusque (ou le diffuseur à 90°), la faible inclinaison de la paroi 2 ne force pas aussi bien la séparation qu'une paroi à angle plus prononcé.

d_1	d_2	d_3
0,008	0,01	0,008

Tableau 5.3: Distances à la paroi pour le diffuseur à 15°

5.3.2 Diffuseur à 30°

Ce cas est le plus intéressant pour l'analyse à cause de sa sensibilité. Le tableau 5.4 présente les distances à la paroi utilisées dans ce cas.

La figure 5.31 présente les résultats obtenus au niveau de la longueur de la zone

d_1	d_2	d_3
0,008	0,01	0,008

Tableau 5.4: Distances à la paroi pour le diffuseur à 30°

de recirculation avec diverses formulations. La notation utilisée est la suivante: aaa/bbb signifie qu'on utilise la formulation aaa pour le mouvement et bbb pour les équations de transport de K et E . Le cas noté "Galerkin/Galerkin (copie)" est pour sa part obtenu avec la méthode de Galerkin, mais sur les maillages générés par le cas SU/Galerkin et non en utilisant le processus adaptatif sur cette solution.

On observe d'abord qu'il y a des écarts très importants entre les diverses formulations et entre les cycles adaptatifs. À la limite d'un raffinement très important, on voit cependant que toutes les méthodes semblent se stabiliser et converger vers la même solution unique. Ceci est important car théoriquement toutes ces méthodes devraient effectivement converger vers la même solution à la limite d'une taille infiniment petite. C'est donc un indice qu'il faut être prudent dans le choix des formulations et surtout il faut être très critique des résultats lorsqu'on désire résoudre un problème sur un maillage même moyennement raffiné. De ce point de vue, les méthodes adaptatives constituent un élément essentiel de validation de la qualité d'une solution par opposition à la résolution sur un maillage unique où l'on pourrait très bien obtenir de faux résultats sans pouvoir s'en rendre compte. On voit en plus que les méthodes adaptatives permettent encore une fois d'atteindre pratiquement la convergence générale et l'indépendance au maillage.

La comparaison avec la valeur expérimentale est dans ce cas plutôt moyenne. La

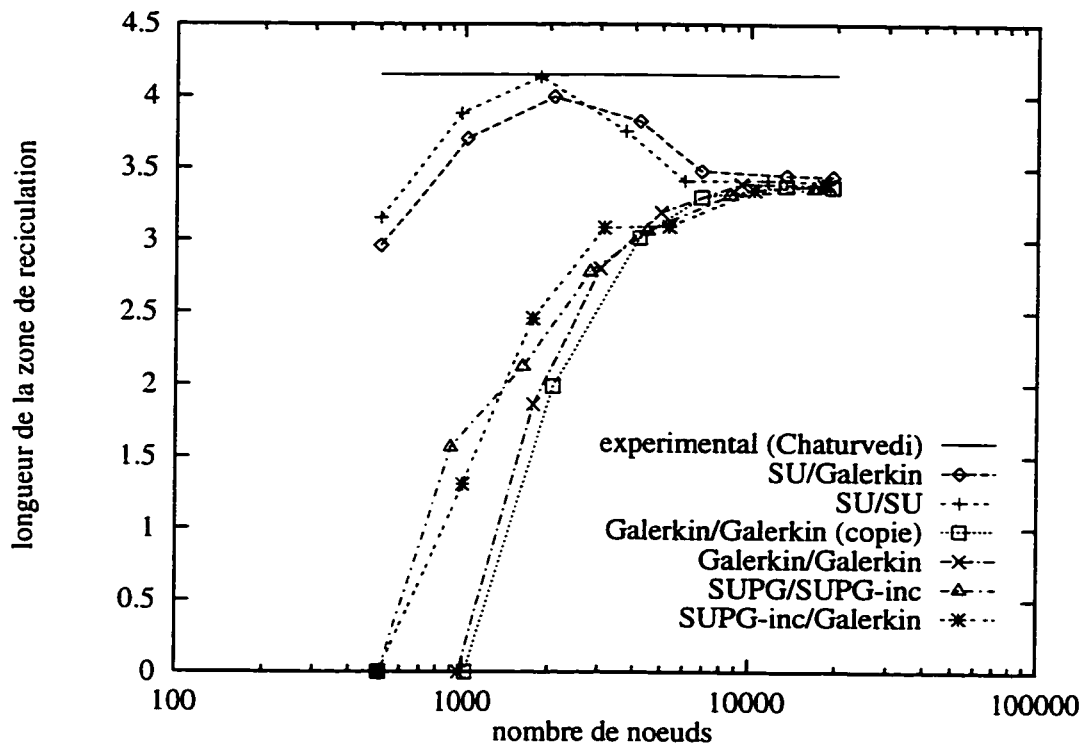


Figure 5.31: Trajectoire de la longueur de la zone de recirculation pour différentes formulations sur le diffuseur à 30°

valeur expérimentale de la longueur de la zone de recirculation est d'environ 4,15 alors que l'ensemble des méthodes donnent une valeur finale autour de 3,4, ce qui correspond à une erreur de 18 %.

On peut analyser plus en détails les résultats de chacune des formulations. Seules les simulations utilisant la formulation SU sur le mouvement ont décelé une zone de recirculation dès le premier maillage. Cette méthode semble d'ailleurs avoir un comportement très différent des autres, avec une longueur de recirculation toujours plus élevée que pour les autres méthodes. Elle a même presque atteint la valeur expérimentale dans un cycle intermédiaire. Il faut quand même demeurer prudent

sur ce fait, car ce n'est pas vraiment mieux d'avoir atteint une valeur près de la valeur expérimentale puisqu'elle ne correspond pas à la vraie solution de ces équations. On ne veut pas ici fausser les résultats de la simulation en prétendant qu'on atteint la valeur expérimentale en plein dans le mille. Il faut plutôt critiquer le modèle et ne pas risquer de pêcher par optimisme et arrêter les calculs lorsqu'on est près de la solution expérimentale.

En général, la méthode SU se comporte donc très bien dans la mesure où elle fournit plus rapidement une solution près de la solution finale, avec des écarts moins importants entre les cycles. Cependant, la solution sur les derniers cycles avec cette méthode semble être encore un peu au-dessus des autres, ce qui n'est pas particulièrement bon à première vue. Il faut rappeler que cette méthode n'est pas résiduelle de sorte qu'il faut être prudent. On peut enfin mentionner que le fait d'utiliser la méthode SU sur le mouvement semble avoir plus d'influence que son utilisation sur les équations de K et E .

La méthode de Galerkin est celle qui se comporte le moins bien. Elle ne détecte pas de recirculation sur les deux premiers cycles et prend beaucoup de temps à bien saisir cette recirculation. Les résultats finaux sont par contre très bons. Cette moins bonne prédiction dans les cycles intermédiaires n'est pas simplement due aux maillages générés, puisque la résolution avec cette même méthode sur les maillages générés par la méthode SU/Galerkin n'est pas meilleure que la résolution sur ses propres maillages.

Les autres méthodes semblent avoir un comportement intermédiaire. On illustre par exemple les cas SUPG/SUPG-inc et SUPG-inc/Galerkin. On a un seul maillage sans recirculation dans ces cas et on converge un peu plus rapidement vers des

niveaux près de la solution finale qu'avec la méthode de Galerkin.

L'évolution des maillages illustre bien la rapidité à capturer une solution près de la solution finale. Les figures 5.32 et 5.33 présentent cette séquence de maillages pour les deux cas les plus extrêmes, soit les formulations Galerkin/Galerkin et SU/SU. On constate que les maillages s'adaptent effectivement beaucoup plus rapidement à la solution dans le cas SU puisqu'ils perçoivent beaucoup plus rapidement cette solution. La différence est particulièrement visible au niveau de la couche cisailée qui présente aussi de grandes variations de K et E . La formulation Galerkin semble par contre percevoir plus rapidement les erreurs près de la paroi 1.

On peut faire un parallèle avec les analyses de décalage du chapitre 4. La méthode de Galerkin ne génère pas de recirculation et donc pas de couche cisailée sur les premiers maillages. Cette zone est donc très erronée mais l'estimateur d'erreur n'y voit pas cette erreur véritable puisqu'il ne s'agit pas d'erreur d'interpolation locale, d'oscillations ou d'irrégularités, mais plutôt d'une erreur sur le niveau général de la solution. Dans ce cas, le décalage semble être dû à une erreur ailleurs, soit au niveau du coin.

La figure 5.34 donne un exemple typique de solution finale (sur le cas Galerkin/Galerkin) pour illustrer à quoi s'adapte le maillage. La solution y est très nette et ressemble beaucoup au cas de l'expansion brusque en fin de compte. Il faut noter que les oscillations apparentes dans les lignes de courant sont dues au visualisateur et à son impression.

La prédiction très moyenne de la zone de recirculation par rapport à la valeur expérimentale donne un bon indice de la qualité des prédictions locales qui sont elles

aussi forcément très moyennes. Dans le but d'alléger, on omet ici de faire les comparaisons locales par rapport aux valeurs expérimentales pour toutes les variables et stations de coupe. On se concentre plutôt sur la comparaison des méthodes et l'évolution au cours des cycles adaptatifs, à l'aide de coupes typiques. On inclut les mesures expérimentales pour ces coupes typiques seulement.

On présente aux figures 5.35 et 5.36 les coupes de la vitesse axiale u à $x = 1$ pour les formulations Galerkin/Galerkin et SU/SU. On y voit à nouveau que la formulation SU génère dès le départ des solutions plus près de la solution finale et qu'il y a moins d'écarts entre les cycles comparativement à la méthode de Galerkin. Il se produit le même phénomène au niveau de la variable k : les figures 5.37 et 5.38 montrent bien les mauvaises prédictions de la méthode de Galerkin dans les premiers cycles alors que la méthode SU fait beaucoup mieux. L'absence d'une séparation de l'écoulement avec la méthode de Galerkin et donc l'absence de la couche cisailée qui en découle a un impact très important au niveau des variables de turbulence dans cette zone.

On peut aussi comparer les différentes formulations sur le premier cycle. Le maillage est le même pour toutes les formulations dans ce cas: il est constitué de 507 noeuds et 216 éléments, soit un maillage très grossier. Les figures 5.39 et 5.41 illustrent les coupes à la station typique $x = 1$ pour u et k respectivement. On voit qu'il y a des écarts très importants entre les formulations. Seule la formulation SU sur le mouvement donne de bons résultats pour u : dans les autres cas on a presque un profil uniforme. C'est aussi cette méthode qui donne les résultats les plus satisfaisants pour k , c'est-à-dire les résultats les plus près de la solution finale. Les figures 5.40 et 5.42 juste en-dessous des figures précédentes illustrent la solution

sur le maillage final. Elles permettent de comparer les solutions initiales à cette distribution finale.

On peut enfin observer sur les figures 5.40 et 5.42 que si le raffinement du maillage est suffisamment important, toutes les formulations convergent vers la même solution. Les écarts sur ces coupes sont très faibles autant sur u que sur k . On réussit donc à atteindre l'indépendance par rapport au maillage et à la formulation. La comparaison entre ces solutions finales et les mesures expérimentales montre que les prédictions ne sont pas particulièrement bonnes. La vitesse axiale u près de l'axe décroît trop rapidement selon x après le début de l'expansion. Il en résulte une recirculation trop faible.

On note aussi que k est surévalué près de l'axe, ce qui suggère que des conditions d'entrée plus faibles sur k auraient été de mise. On a utilisé ici des conditions d'entrée qui semblaient raisonnables, sans tenter de faire de la simulation inverse en modifiant ces conditions pour arriver sur les points expérimentaux.

Comme dernière observation, on peut dire que la loi de paroi générale fonctionne bien. La figure 5.43 montre les vecteurs vitesse près du coin pour un cas typique, soit le cycle 2 de la formulation SU/SU. On voit que la vitesse est horizontale sur le coin (c'est ce qu'on a imposé) et que les vecteurs vitesse sur les noeuds suivants de la paroi inclinée s'adaptent: on a d'abord des vitesses qui sortent légèrement du domaine pour compenser pour le coin (équilibrer la masse puisqu'on impose un débit élémentaire nul), puis qui entrent (pour le bilan de masse de l'élément suivant), etc... Ces légères oscillations s'amortissent rapidement et on a des vitesses normales nulles par la suite. Ces légères pénétrations de fluide ne sont peut-être pas souhaitables, mais c'est tout le problème de l'imposition d'une condition de tangence en présence

d'un coin. La seule façon d'obtenir partout une vitesse normale vraiment nulle serait d'avoir une vitesse nulle sur le coin, ce qui n'est pas plus désirable.

Ces oscillations s'amenuisent quelque peu avec le raffinement. Il y a toujours à peu près le même nombre d'éléments affectés, de sorte que la longueur de frontière affectée diminue en raffinant le maillage. Il serait envisageable d'introduire une estimation d'erreur à la frontière mesurant la valeur absolue de la vitesse normale $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, pour tenir compte des erreurs introduites par les conditions aux frontières.

Cette observation des vitesses près du coin fait aussi ressortir le fait que l'écoulement ne décroche pas au coin, mais un peu plus loin. Les mesures expérimentales ne permettent pas de confirmer ou infirmer ce comportement.

On peut finalement critiquer un autre choix: serait-il mieux d'imposer la condition de tangence générale sur les trois parois au lieu d'imposer $v = 0$ sur deux de celles-ci? L'utilisation de la condition de tangence faible partout modifie en effet la solution, mais cette influence semble à la fois être locale et ne pas affecter la solution générale. Des études plus poussées permettraient de donner plus de bien fondé à cette affirmation. Quoi qu'il en soit, il est certain que très près du coin la vitesse est modifiée. La figure 5.44 montre un exemple de distribution de vitesse près du coin avec l'utilisation d'une condition de tangence faible partout. On a alors des oscillations sur les deux parois, mais elles sont légèrement plus faibles.

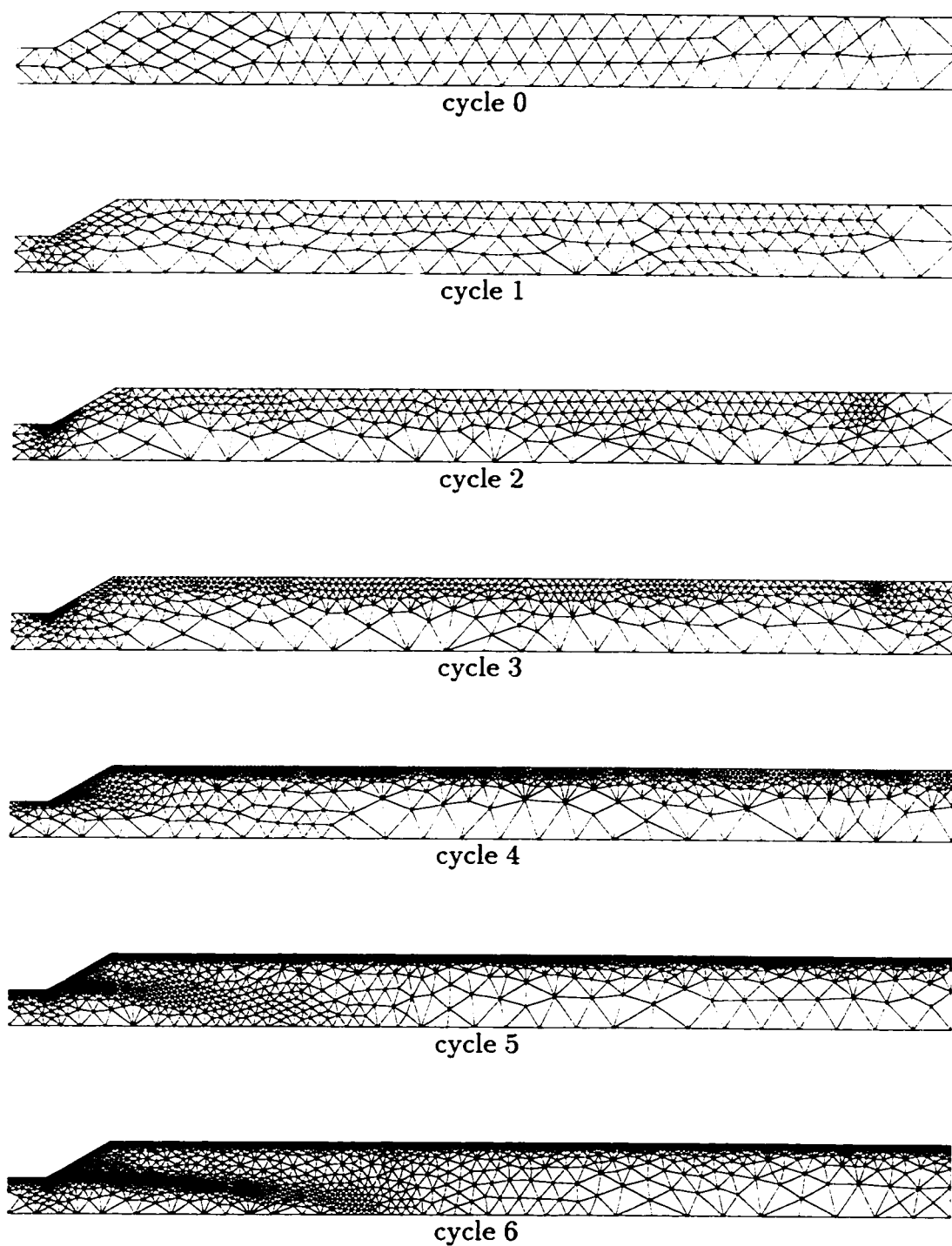


Figure 5.32: Séquence de maillages pour le diffuseur à 30° avec la méthode de Galerkin

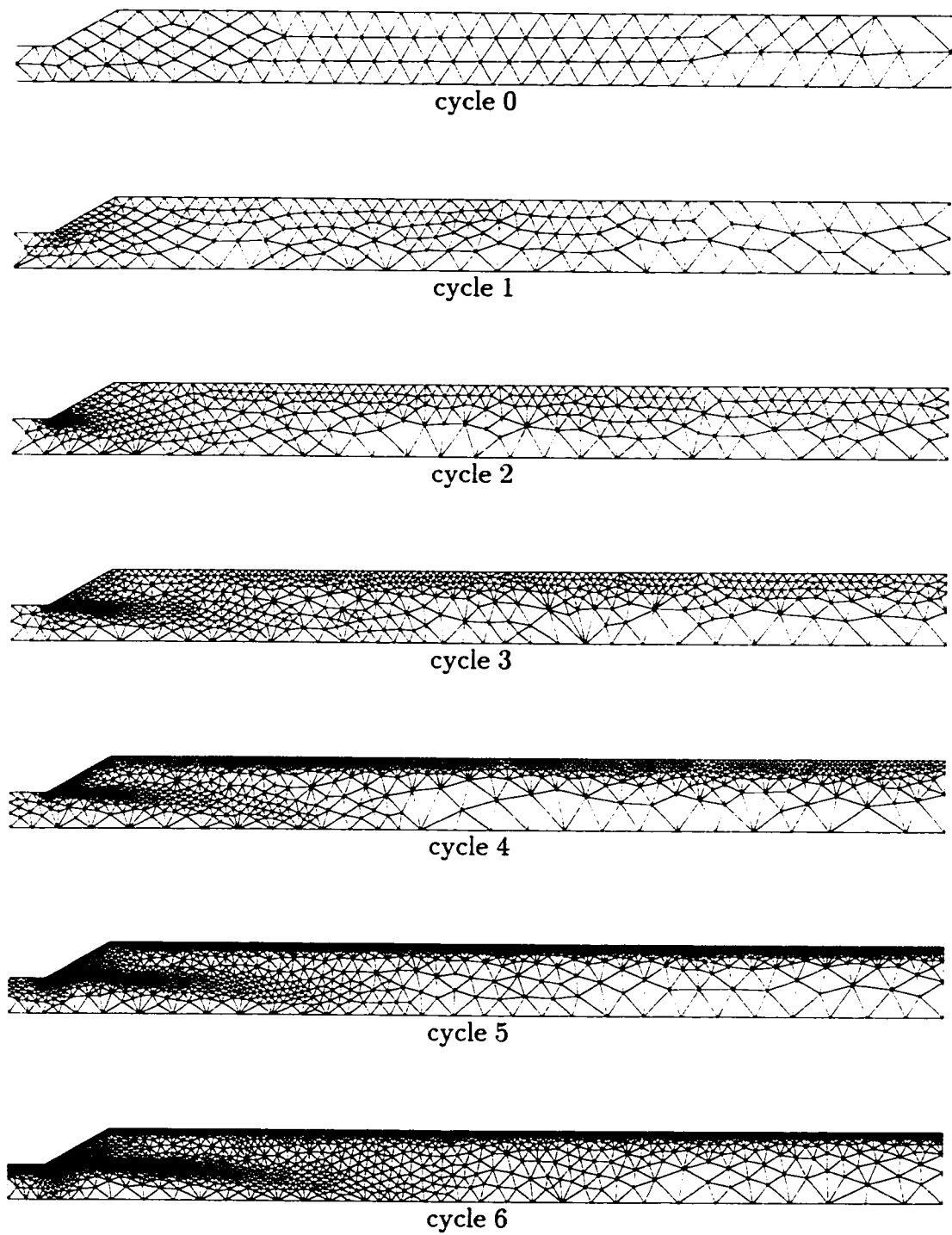


Figure 5.33: Séquence de maillages pour le diffuseur à 30° avec la méthode SU

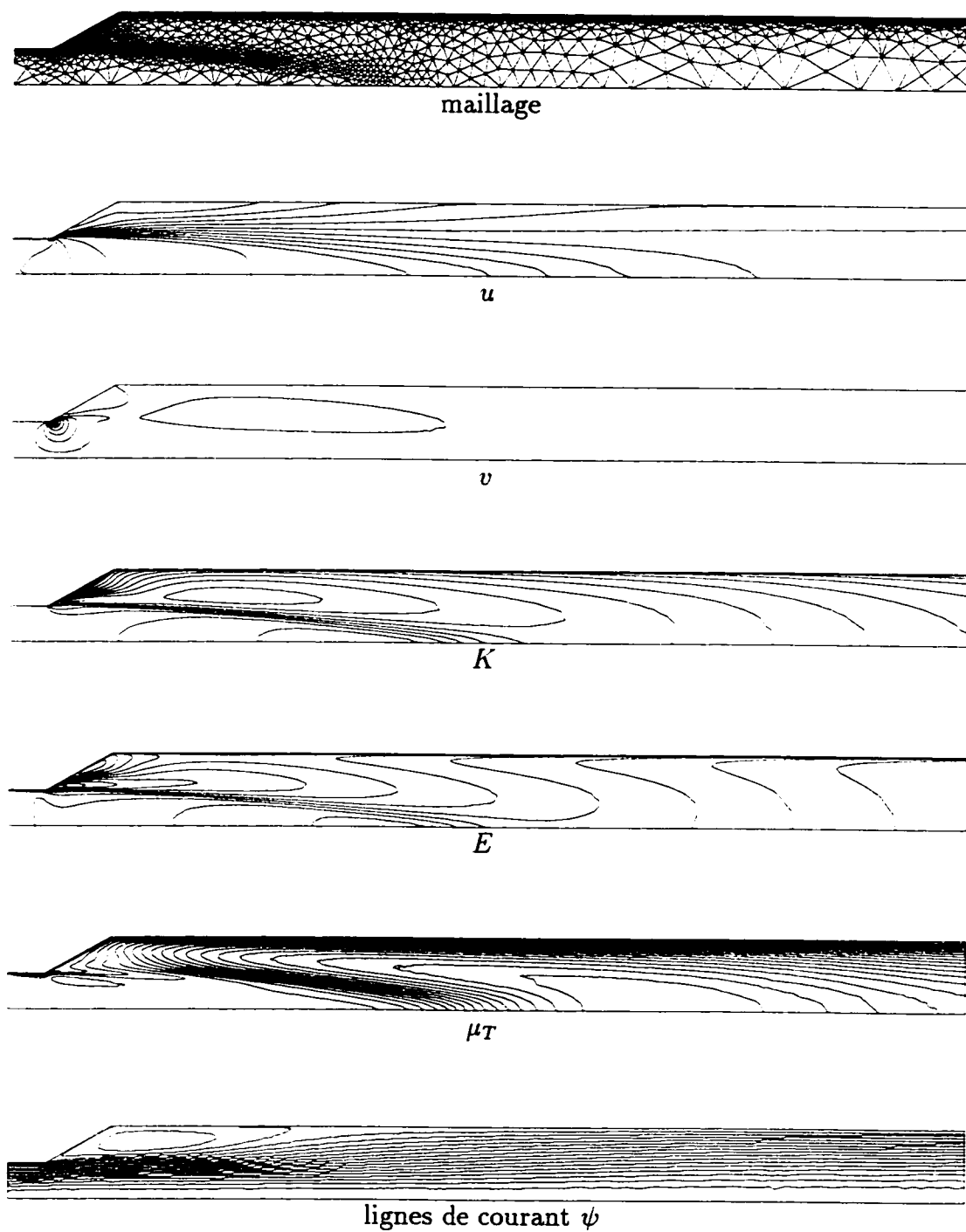


Figure 5.34: Solution sur le maillage final pour le diffuseur à 30° avec la méthode de Galerkin

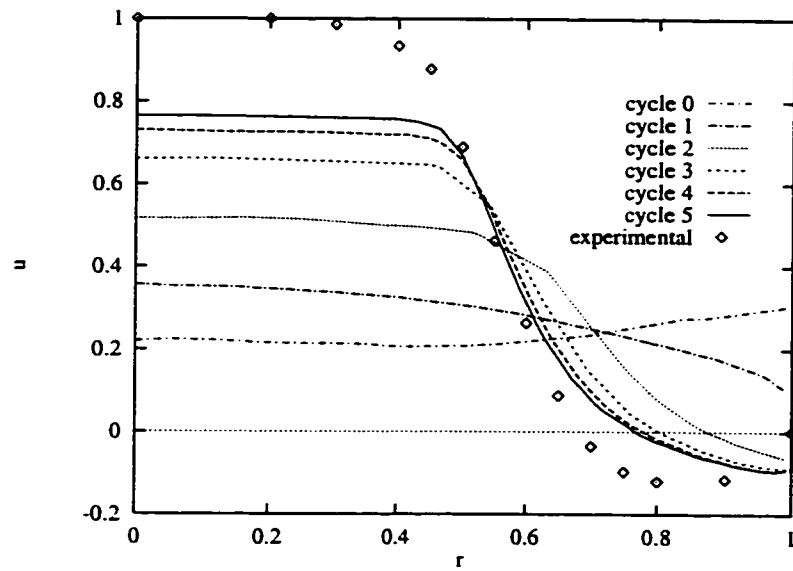


Figure 5.35: Coupes de u à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° avec la méthode de Galerkin

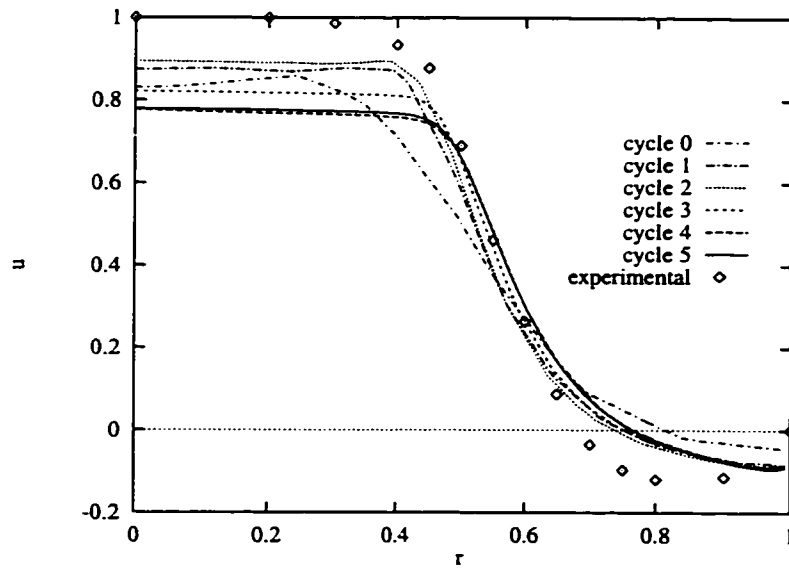


Figure 5.36: Coupes de u à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° avec la méthode SU

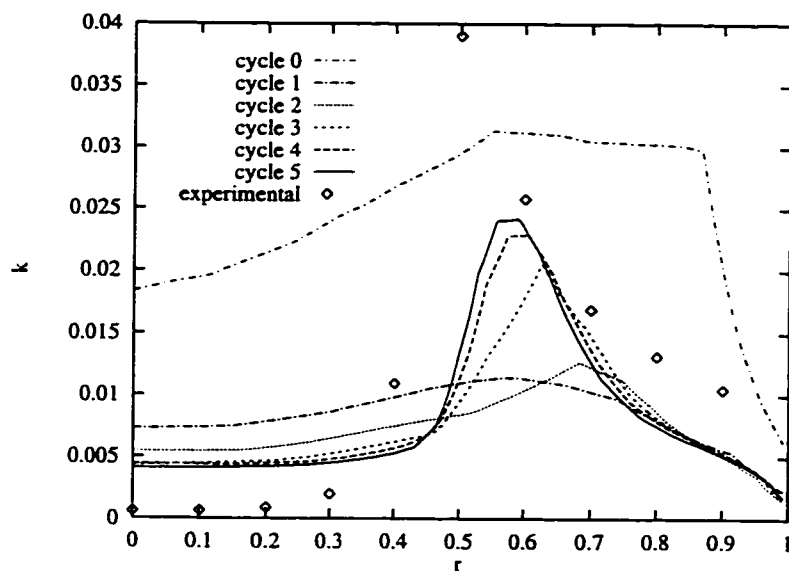


Figure 5.37: Coupes de k à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° avec la méthode de Galerkin

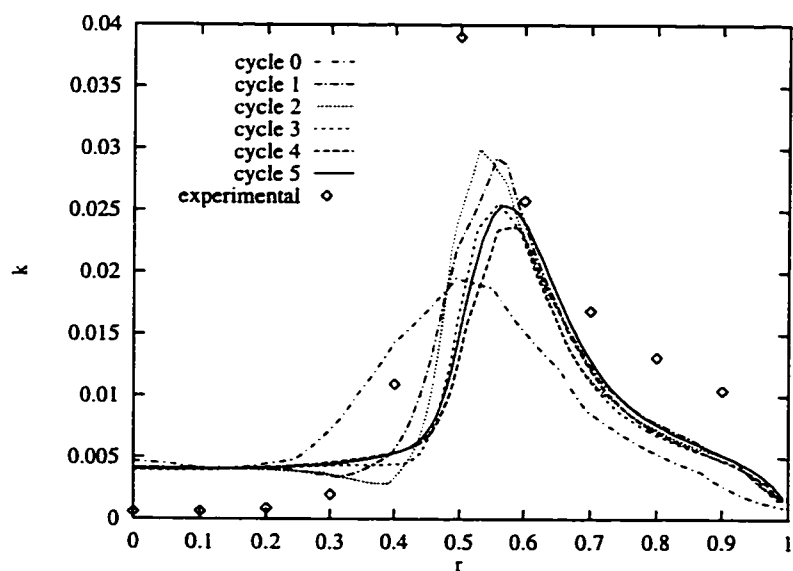


Figure 5.38: Coupes de k à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° avec la méthode SU

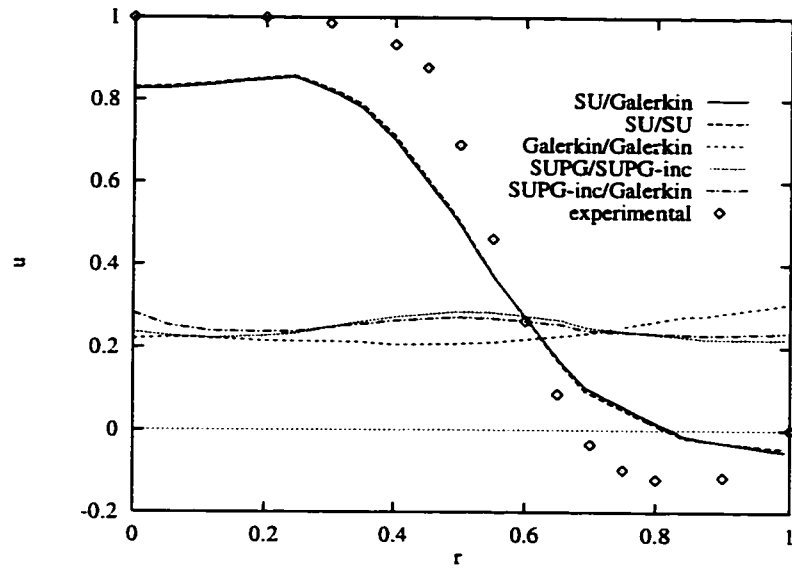


Figure 5.39: Coupes de u à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° sur le maillage initial

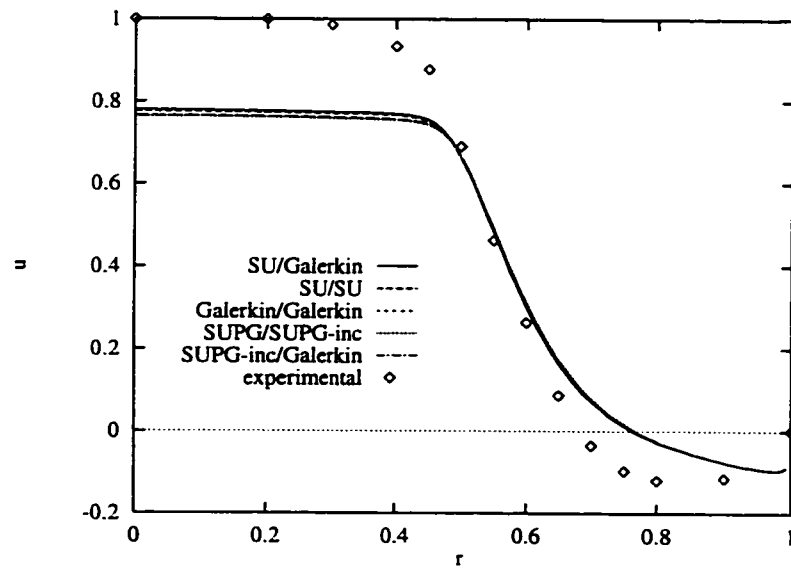


Figure 5.40: Coupes de u à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° sur le maillage final

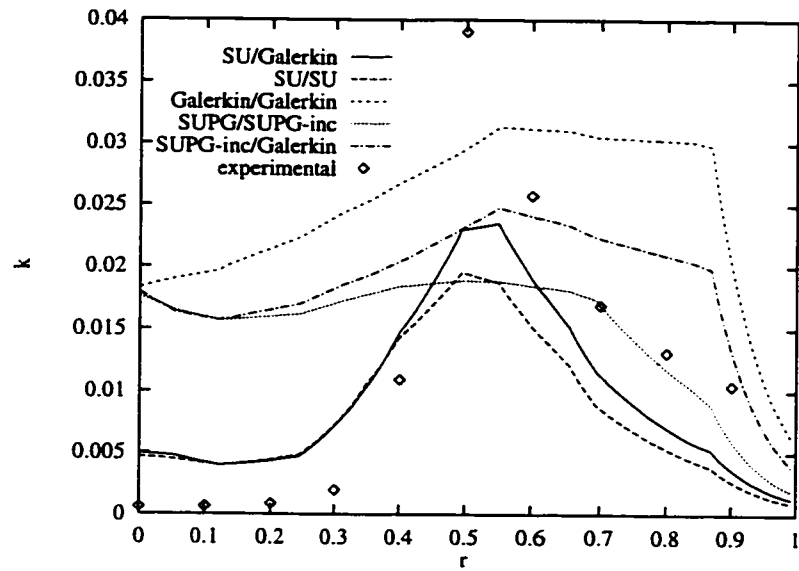


Figure 5.41: Coupes de k à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° sur le maillage initial

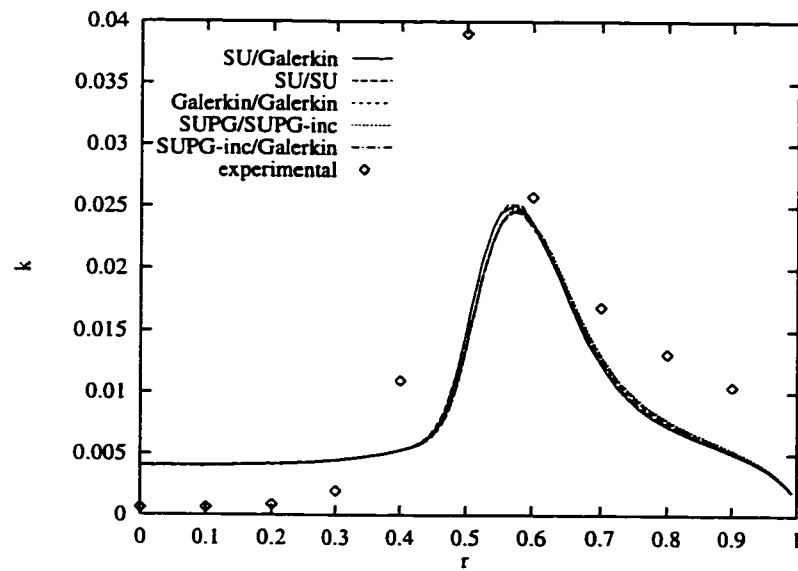


Figure 5.42: Coupes de k à $x = 1$ pour le diffuseur à 30° sur le maillage final

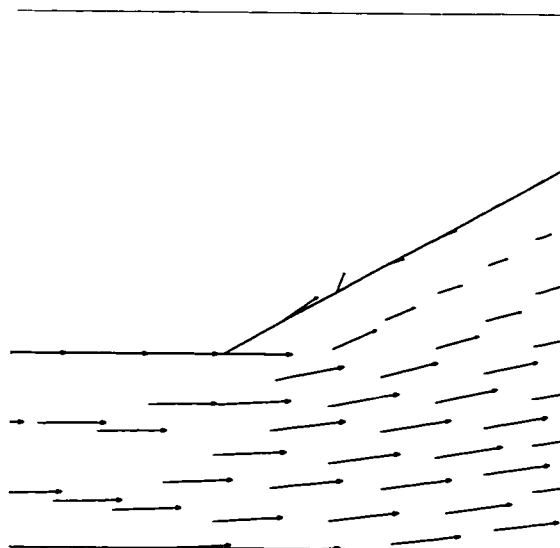


Figure 5.43: Vecteurs vitesse typiques près du coin avec une loi de paroi générale sur une paroi

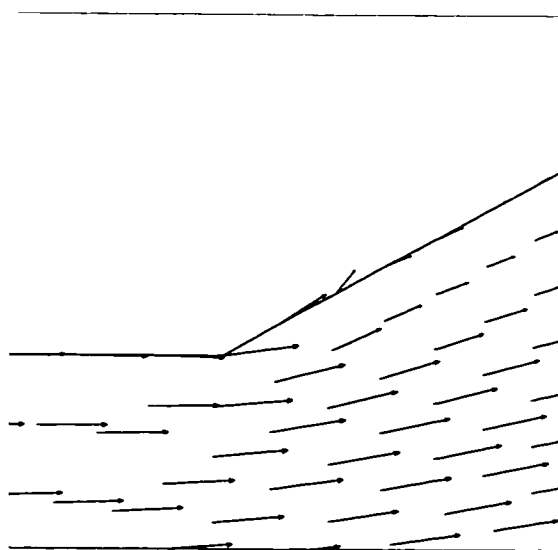


Figure 5.44: Vecteurs vitesse typiques près du coin avec une loi de paroi générale sur trois parois

5.3.3 Diffuseur à 45°

On considère cette fois un diffuseur à 45°. Le tableau 5.5 présente les distances à la paroi utilisées dans ce cas. On remarque que la valeur de d_2 est différente de celle du cas précédent. Le choix de cette valeur est basé sur les observations de y^+ que l'on cherche à maintenir dans une plage acceptable.

d_1	d_2	d_3
0,008	0,015	0,008

Tableau 5.5: Distances à la paroi pour le diffuseur à 45°

La figure 5.45 présente les résultats obtenus au niveau de la longueur de la zone de recirculation avec diverses formulations. La notation utilisée est la même que pour le diffuseur à 30°. On a fait un moins grand nombre de simulations que pour le diffuseur à 30°, les cas résolus fournissant suffisamment d'information pertinente. On utilise ici partout la formulation Galerkin pour les équation de transport de K et E de manière à n'étudier qu'un paramètre à la fois. D'ailleurs, le cas du diffuseur à 30° a illustré que c'est d'avantage la formulation sur le mouvement qui a de l'influence. Le comportement est similaire au cas précédent, mais légèrement moins prononcé. La méthode de Galerkin ne génère pas de recirculation sur le premier maillage et prend plus de temps à atteindre des niveaux près de la valeur finale. La méthode SU est encore celle qui offre les meilleures prédictions sur les premiers maillages. Les trois méthodes illustrées convergent cependant toutes vers la même solution finale et ce avec très peu d'écarts. Cette valeur finale de la longueur de la zone de recirculation est autour de 4,37, alors que la valeur expérimentale est d'environ 4,5,

soit une erreur de 3 %. Les résultats numériques sont donc cette fois très près de la valeur expérimentale.

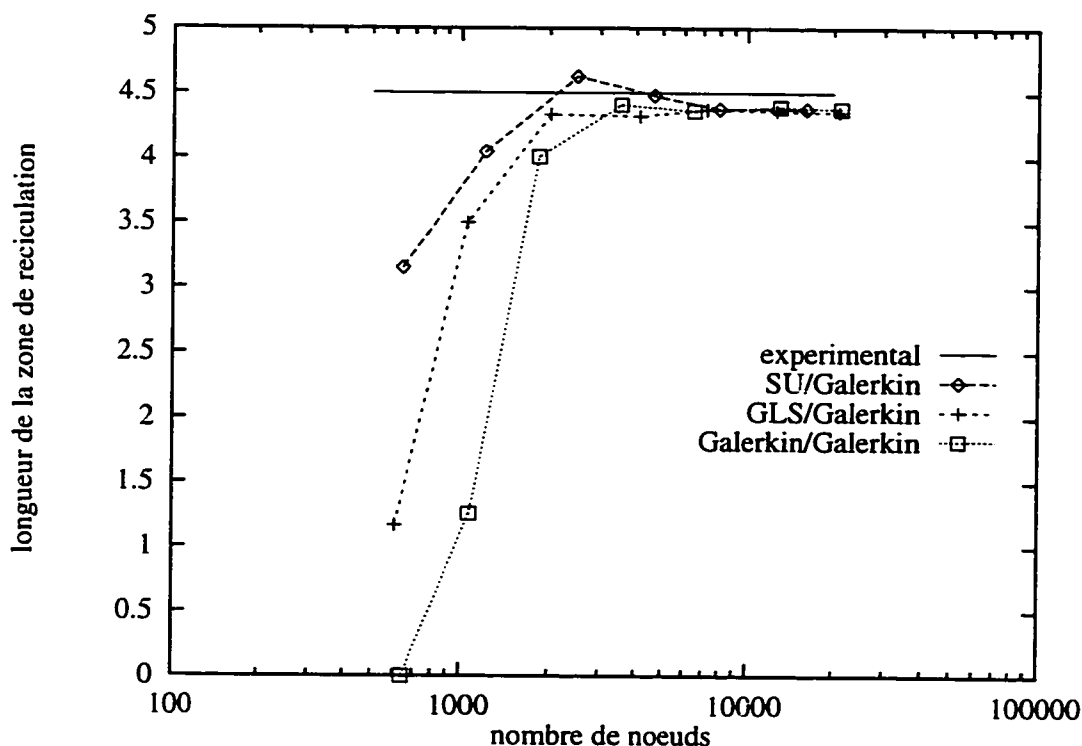


Figure 5.45: Trajectoire de la longueur de la zone de recirculation pour différentes formulations sur le diffuseur à 45°

5.3.4 Diffuseur à 90°

Ce cas a fait l'objet de la section 5.2 avec la formulation GLS/SUPG-inc. La sévérité de l'expansion fait en sorte que l'écoulement est à toute fin pratique forcé de se séparer. On observe donc beaucoup moins d'écarts entre les différentes formulations. Simplement pour illustrer la moins grande sensibilité à la formulation, on procède à une résolution dans la formulation SU/Galerkin, sur les maillages de la for-

mulation GLS/SUPG-inc précédemment décrite. La figure 5.46 montre l'évolution de la longueur de la zone de recirculation. On voit qu'on a effectivement des écarts beaucoup moins marqués entre les méthodes et d'assez bonnes prédictions sur les premiers cycles. On n'a pas jugé bon d'effectuer d'autres simulations sur ce cas. La valeur de la longueur de la zone de recirculation est pour ce cas très près de la valeur expérimentale.

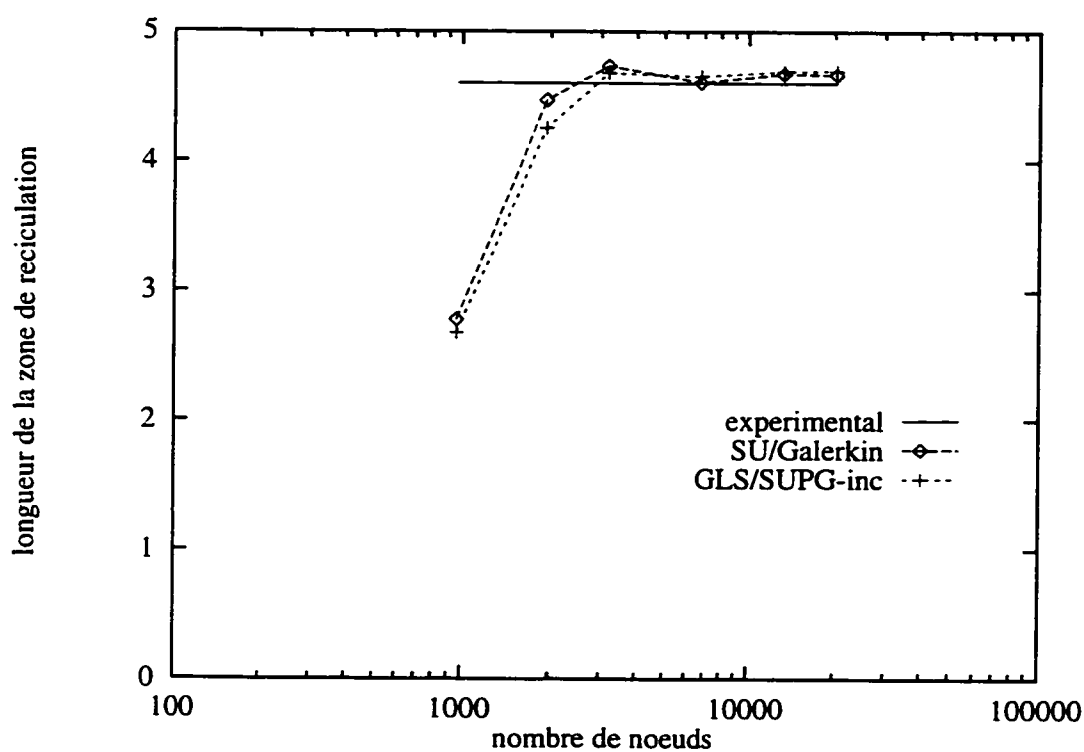


Figure 5.46: Trajectoire de la longueur de la zone de recirculation pour différentes formulations sur le diffuseur à 90°

5.3.5 Synthèse et conclusions

Les simulations numériques ont donné dans l'ensemble des résultats qui s'apparentent assez bien aux valeurs expérimentales, bien qu'il y ait des écarts relativement importants dans certains cas. On reproduit au moins les tendances et les phénomènes physiques. On a pu constater que la longueur de la zone de recirculation augmente avec l'angle du diffuseur et que les prédictions numériques sont meilleures (plus près des valeurs expérimentales) lorsque cet angle est élevé. Le modèle de turbulence et le modèle de loi de paroi ont donc leurs limites, mais donnent des résultats respectables dans l'ensemble.

On a aussi pu constater l'influence des diverses formulations éléments finis sur des maillages plus grossiers. Cette influence s'est fait sentir d'autant plus que l'angle du diffuseur était faible. Dans ce cas particulier des diffuseurs, il s'est avéré que la méthode SU donnait les meilleurs résultats alors que la méthode de Galerkin était la moins bonne. Il est difficile de généraliser cet énoncé pour toute simulation, mais il est évident que le choix de la formulation aura toujours une certaine influence sur la solution. Un contre-exemple pour la méthode SU: Ilinca [1] a fait des simulations sur un problème possédant une solution analytique en utilisant différentes formulations sur un maillage grossier. Ce cas représente une couche cisailée et ne possède pas de zone de recirculation. La méthode SU a donné les pires résultats dans ce cas.

Un point très important est la convergence globale. On a pu constater qu'avec toutes les formulations, on arrivait à atteindre une certaine stabilisation de la solution vers une solution bien précise en raffinant suffisamment. De plus, toutes les formulations semblaient converger vers une même solution finale.

Le processus de remaillage adaptatif s'avère d'une très grande utilité. En plus de bien s'adapter à la solution et ainsi optimiser les ressources et la précision, il permet d'observer s'il y a la convergence globale et indépendance au maillage. Il fournit par conséquent un certain degré de confiance sur la solution numérique.

On peut enfin se demander quel est le meilleur choix de formulation. C'est une question qui n'a pas de réponse sans équivoque et il faut rester prudent quant à sa généralisation. D'après les simulations effectuées dans cette section, on peut dire que la méthode SU est celle qui donne les meilleurs résultats dans les premiers cycles (maillages grossiers). Elle peut donc être un bon choix sur ces premiers maillages, malgré le fait que cette méthode ne soit pas résiduelle et qu'il soit difficile de généraliser son comportement. De toute façon, on ne cherche pas une très grande précision avec un niveau de confiance élevé sur les premiers cycles, mais il est intéressant d'avoir dès le départ une solution près de la solution finale pour que le maillage puisse commencer à s'adapter dès ces premiers cycles. Il faut de toute façon rester prudent sur ces résultats intermédiaires. L'utilisation des autres méthodes n'est pas mauvaise non plus, surtout si ce n'est que la solution finale qui présente un intérêt. On peut donc considérer d'autres critères dans le choix de la formulation, par exemple la facilité de convergence. Dans le cas des diffuseurs, c'est justement la méthode SU qui convergeait le mieux sur le maillage initial, ce qui constitue peut-être son plus grand avantage.

La résolution des derniers cycles peut utiliser à peu près n'importe quelle méthode puisqu'elles convergent toutes vers la même solution de toute façon. Encore là, on peut considérer d'autres critères dans le choix de la formulation, tel que la facilité de convergence, la réduction d'oscillations avec des méthodes de stabilisation ou la

précision (en terme d'estimation d'erreur). On devrait peut-être éviter ici les formulations non résiduelles, surtout si on n'atteint pas tout à fait la convergence au maillage ou si on ne sais pas trop précisément le niveau de précision qu'on a atteint. Les méthodes résiduelles demeurent théoriquement plus fiables.

Conclusion

Le but du présent projet était d'étendre au cas axisymétrique une méthodologie adaptative permettant de résoudre des écoulements turbulents incompressibles. On a utilisé les équations de Reynolds avec un modèle de turbulence $k-\epsilon$ jumelé à une loi de paroi. On a utilisé la formulation dite en variables logarithmiques pour le modèle de turbulence. Le processus adaptatif avait quant à lui une tâche d'optimisation en générant des maillages adaptés à la solution. Il procédait à une réduction de la norme de l'erreur entre chaque cycle adaptatif par un facteur donné tout en tentant d'équ répartir l'erreur. La technique d'estimation d'erreur utilisée est une méthode de projection locale basée sur un moindre carré.

Les résultats généraux obtenus montrent que le résolveur s'est avéré performant. L'utilisation des variables logarithmiques a été d'une grande utilité et d'une grande efficacité. Le processus adaptatif dans son ensemble s'est avéré très robuste. Il a permis d'obtenir des solutions très précises aux équations. En fait, il a permis d'atteindre des solutions qui, à toute fin pratique, ne dépendent plus du maillage ou de la formulation utilisée. On s'approche grandement de la solution "numériquement exacte".

Les cas analytiques de vérification étudiés ont permis de constater cette précision dans la solution numérique et la convergence globale vers la solution exacte des équations. On a aussi pu constater que les maillages générés par le processus adaptatif s'adaptaient très bien à la solution. Ces cas ont permis d'examiner en détails les performances de l'estimateur d'erreur. Cet estimateur par projection locale a donné de bons résultats dans l'ensemble, soit des estimations d'erreurs près des erreurs exactes. Certaines faiblesses ou limites de cet estimateur ont cependant pu être observées: on les a attribuées au décalage de la solution. Ce phénomène consiste en fait en une solution qui est à un mauvais niveau moyen sur de grandes distances (plusieurs éléments consécutifs) au lieu de présenter des oscillations autour de la solution exacte. Lorsqu'on a un tel décalage, l'estimateur devient moins performant puisqu'il est justement conçu pour déceler les erreurs d'interpolation ou d'oscillations locales autour d'une valeur exacte et non un déplacement généralisé de la solution. Ce phénomène semble pouvoir se produire assez fréquemment, mais on n'a pas été en mesure de déterminer avec certitude les causes exactes du problème. Les conséquences ne sont cependant pas dramatiques.

Les applications ont plutôt permis de valider le modèle de turbulence et les lois de paroi utilisés par des comparaisons avec des mesures expérimentales. Sur ce point on peut dire que le modèle $k - \epsilon$ représente assez bien la réalité. Son comportement est satisfaisant, avec des prédictions un peu moins bonnes au niveau des quantités de turbulence. Il ne faut pas oublier qu'il y a d'autres sources d'erreur telles les conditions d'entrée. Dans les cas présentant une zone de recirculation suite à une expansion assez sévère, les longueurs de cette zone de recirculation sont très bien prédites. C'est seulement avec des diffuseurs avec de petits angles que la prédiction est mauvaise à ce niveau.

La série de diffuseurs étudiés a permis de mettre en lumière l'influence du choix de la formulation (formulation de Galerkin standard ou une des diverses formes stabilisées présentées) sur des maillages grossiers. Des écarts très importants ont été signalés selon ce choix. Ainsi, la formulation SU a donné les meilleurs résultats dans la mesure où elle prédisait dès les premiers maillages des solutions beaucoup plus près de la solution finale. Par opposition, la méthode de Galerkin s'est avérée la moins performante avec parfois une absence de recirculation sur les deux premiers maillages et une très lente progression vers une bonne représentation de cette recirculation. Il faut donc être prudent dans le choix de la formulation utilisée et surtout être critique sur les résultats obtenus sur des maillages grossiers ou intermédiaires ou sur un seul maillage sans processus adaptatif. Sur ce point, les méthodes adaptatives sont d'une grande utilité: elles permettent de vérifier si la solution se stabilise entre les cycles et converge vers une solution bien précise. On peut alors avoir une plus grande confiance dans les résultats. D'ailleurs, à la limite du raffinement toutes les formulations utilisées ont convergé vers la même solution finale malgré les écarts observés dans les cycles intermédiaires.

Les étapes logiques de poursuite de ce travail sont tout d'abord l'ajout d'une vitesse dans la direction tangentielle θ , ce qui permettrait de résoudre une autre vaste gamme de problèmes pratiques intéressants. On peut aussi penser aux problèmes avec transfert de chaleur, aux écoulements compressibles et à l'étude d'autres modèles de turbulence. Du côté des améliorations souhaitables qui sont ressorties des présentes simulations, notons l'ajout d'étirement et une modification à l'estimateur d'erreur qui pourrait tenir compte des conditions aux frontières et des équations différentielles résolues, ce qui pourrait permettre d'améliorer les indices d'efficacité et peut-être même de détecter les erreurs dues au décalage de la solution.

Bibliographie

- [1] ILINCA, F. (1995). *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements turbulents*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [2] PANTON, R.L. (1984). *Incompressible Flow*. John Wiley and Sons.
- [3] CURRIE, I.G. (1993). *Fundamental Mechanics of Fluids*. 2e édition. McGraw Hill.
- [4] HINZE, J.O. (1975). *Turbulence*. McGraw Hill.
- [5] TENNEKES, H. et LUMLEY, J.L. (1972). *A First Course in Turbulence*. MIT Press.
- [6] BOUSSINESQ, J. (1877). Théorie de l'écoulement tourbillant. *Mém. prés. par div. savants à l'académie des Sciences de Paris*, 23.
- [7] LAUNDER, B.E. et SPALDING, J. (1974). The Numerical Computations of Turbulent Flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 3, 269-289.
- [8] CHABARD, J.P. (1991). *Projet N3S de mécanique des fluides - Manuel théorique de la version 3*. Rapport EDF HE-41/91.30B.

- [9] IGNAT, L., PELLETIER, D. et ILINCA, F. (1996). An Adaptive Finite Element Method for Turbulent Heat Transfer. AIAA Paper 96-0607, *34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno.
- [10] ILINCA, F. et PELLETIER, D. (1997). Posivity Preservation and Adaptive Solution for the $k-\epsilon$ Model of Turbulence. AIAA Paper 97-0205, *35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno.
- [11] REDDY, J.N. (1993). *An Introduction to the Finite Element Method*. 2e édition. McGraw Hill.
- [12] SZABÓ, B. et BABUŠKA, I. (1991). *Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons.
- [13] CUVELIER, C., SEGAL, A. et VAN STEENHOVEN, A.A. (1986). *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*. D. Reidel Publishing Company.
- [14] FORTIN, M. et GLOWINSKI, R. (1982). *Méthodes de Lagrangien augmenté*. Dunod.
- [15] PELLETIER, D., FORTIN, A. et CAMARERO, R. (1989). Are FEM Solutions of Incompressible Flows Really Incompressible? (or How Simple Flows Can Cause Headaches!). *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 9, 99-112.
- [16] HUGHES, T.J.R. et BROOKS, A. (1979). A Multi-dimensionnal Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion. Dans T.J.R. Hughes (ed.), *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, ASME.
- [17] BROOKS, A.N. et HUGHES, T.J.R. (1982). Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Em-

- phasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 32, 199-259.
- [18] HUGHES, T.J.R. (1987). Recent Progress in the Development and Understanding of SUPG Methods with Special Reference to the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 7, 1261-1275.
- [19] HUGHES, T.J.R., FRANCA, L.P. et HULBERT, G.M. (1989). A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VIII. The Galerkin/Least-Squares Method for Advective-Diffusive Equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 73, 173-189.
- [20] HÉTU, J.-F. (1991). *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements visqueux incompressibles*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [21] ZIENKIEWICZ, O.C. et ZHU, J.Z. (1992). The Superconvergent Patch Recovery and *A Posteriori* Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 33, 1331-1364.
- [22] DOUGLAS, J. et WANG, J. (1989). An Absolutely Stabilized Finite Element Method for the Stokes Problem. *Math. Comput.*, 52, 495-508.
- [23] TREMBLAY, P. (1996). *Estimation d'erreur et contrôle du maillage appliqués à la simulation d'écoulements dans des joints hydrauliques*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [24] ZIENKIEWICZ, O.C. et ZHU, J.Z. (1987). A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 24, 337-357.

- [25] ILINCA, F. (1993). *Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements visqueux*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [26] SCHLICHTING, H. (1979). *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 747-750.
- [27] WYGNANSKI, I. et FIEDLER, H.E. (1969). Some Measurements in the Self-Preserving Jet. *J. Fluid Mech.*, 38, 577-612.
- [28] MARTINUZZI, R. et POLLARD, A. (1989). Comparative Study of Turbulence Models in Predicting Turbulent Pipe Flow. Part I: Algebraic Stress and $k - \epsilon$ Models. *AIAA Journal*, 27, 29-36.
- [29] BARBIN, A.J. et JONES, J.B. (1963). Turbulent Flow in the Inlet Region of a Smooth Pipe. *ASME Journal of Basic Engineering*, 85, 29-34.
- [30] LAWN, C.J. (1971). Rate of Dissipation in Turbulent Pipe Flow. *J. Fluid Mech.*, 48, 477-505.
- [31] RICHMAN, J.W. et AZAD, R.S. (1973). Developing Turbulent Flow in a Smooth Pipe. *Appl. Sci. Res.*, 28, 419-441.
- [32] PAO, R.H.F. (1961). *Fluid Mechanics*. John Wiley and Sons.
- [33] BENIM, A.C. et ZINSER, W. (1985). Investigation into the Finite Element Analysis of Confined Turbulent Flows using a $k - \epsilon$ Model of Turbulence. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 51, 507-523.
- [34] CHATURVEDI, M.C. (1963). Flow Characteristics of Axisymmetric Expansions. *J. Hydraul. Div., Proc. Am. Soc. Civ. Engrs*, 89, 61-92.

- [35] NALLASAMY, M. (1987). Turbulence Models and their Applications to the Prediction of Internal Flows. *Computers and Fluids*, 15, 151-194.

Annexe A

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

Dans cette annexe, on présente les expressions en coordonnées cylindriques de quelques opérateurs différentiels. On mentionne aussi quelques opérations vectorielles et tensorielles de même que des exemples tirés des équations de Navier-Stokes.

Soit s un scalaire, \mathbf{v} un vecteur et \mathbf{T} un tenseur:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_r \\ v_\theta \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xr} & T_{x\theta} \\ T_{rx} & T_{rr} & T_{r\theta} \\ T_{\theta x} & T_{\theta r} & T_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

On a alors les opérations différentielles suivantes:

$$\nabla s = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_r}{\partial x} & \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial r} & \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r T_{rx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta x}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r T_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{T_{\theta \theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta \theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{\theta r} - T_{r\theta}}{r} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Soient \mathbf{u} et \mathbf{v} deux vecteurs et \mathbf{T} et \mathbf{S} deux tenseurs. On peut procéder à diverses opérations:

- produit scalaire entre deux vecteurs:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i \quad (\text{A.6})$$

- produit interne de deux tenseurs:

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} S_{ji} \quad (\text{A.7})$$

- produit vectoriel d'un vecteur avec un tenseur:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{u} \quad \text{tel que} \quad u_j = \sum_{i=1}^3 v_i T_{ij} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \quad \text{tel que} \quad u_j = \sum_{i=1}^3 v_i T_{ji} \quad (\text{A.9})$$

On retrouve des termes de ce genre dans les équations de Navier-Stokes. En utilisant la notation pour ces équations, soit $\mathbf{u} = (u, v, w)$ pour la vitesse, p pour la pression et $\boldsymbol{\tau}$ pour le tenseur des contraintes visqueuses et en considérant le cas axisymétrique où l'on pose que $w = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, on a par exemple:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v}{r} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v}{r} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2r\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right] - 2\mu \frac{v}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \quad (\text{A.15})$$

Annexe B

Méthodes d'éléments finis stabilisées

On a présenté à la section 2.6 différentes méthodes de stabilisation pour les écoulements dominés par la convection. On reprend ici plus en détails toutes ces formulations, autant celles des équations de mouvement que celles des équations de transport des variables de turbulence (pour la formulation en variables logarithmiques). En plus de la forme vectorielle générale, on explicite la formulation scalaire particulière au cas axisymétrique. Dans la forme scalaire, on ne donne que les termes supplémentaires issus de la méthode de stabilisation afin d'alléger l'écriture.

B.1 Équations de mouvement

B.1.1 Méthode de Galerkin

- forme générale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

- mouvement axial:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) \delta u \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mu + \mu_T) \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial r} \right] d\Omega \\ - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta u}{\partial x} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho f_x \delta u \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{t}_x \delta u \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

- mouvement radial:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) \delta v \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mu + \mu_T) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial r} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial \delta v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r^2} \delta v \right] d\Omega \\ - \int_{\Omega} p \left(\frac{\partial \delta v}{\partial v} + \frac{\delta v}{r} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \rho f_r \delta v \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{t}_r \delta v \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

B.1.2 Méthode SU

- forme générale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot (\tau \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) \, d\Omega^e = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

- mouvement axial (termes supplémentaires):

$$\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) \tau \left(u \frac{\partial \delta u}{\partial x} + v \frac{\partial \delta u}{\partial r} \right) d\Omega^e \quad (\text{B.5})$$

- mouvement radial (termes supplémentaires):

$$\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) \tau \left(u \frac{\partial \delta v}{\partial x} + v \frac{\partial \delta v}{\partial r} \right) d\Omega^e \quad (\text{B.6})$$

B.1.3 Méthode SUPG-incomplet

- forme générale:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{f}) \cdot (\tau \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) \, d\Omega^e \\
 & = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

- mouvement axial (termes supplémentaires):

$$\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x \right\} \tau \left(u \frac{\partial \delta u}{\partial x} + v \frac{\partial \delta u}{\partial r} \right) d\Omega^e \tag{B.8}$$

- mouvement radial (termes supplémentaires):

$$\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \rho f_r \right\} \tau \left(u \frac{\partial \delta v}{\partial x} + v \frac{\partial \delta v}{\partial r} \right) d\Omega^e \tag{B.9}$$

B.1.4 Méthode SUPG

- forme générale:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f} \} \cdot (\tau \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) \, d\Omega^e \\
 & = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

- mouvement axial (termes supplémentaires):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[2(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \rho f_x \right\} \tau \left(u \frac{\partial \delta u}{\partial x} + v \frac{\partial \delta u}{\partial r} \right) d\Omega^e
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

- mouvement radial (termes supplémentaires):

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2r (\mu + \mu_T) \frac{\partial v}{\partial r} \right] + 2 (\mu + \mu_T) \frac{v}{r^2} - \rho f_r \right\} \tau \left(u \frac{\partial \delta v}{\partial x} + v \frac{\partial \delta v}{\partial r} \right) d\Omega^e \end{aligned} \quad (B.12)$$

B.1.5 Méthode GLS

- forme générale:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2 (\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2 (\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f} \} \cdot \tau_u (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) \, d\Omega^e \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \mathbf{u} \, \tau_p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega^e = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (B.13)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, \delta p \, d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2 (\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f} \} \cdot \tau_u \nabla \delta p \, d\Omega^e = 0 \end{aligned} \quad (B.14)$$

- mouvement axial (termes supplémentaires):

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[2 (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \rho f_x \right\} \tau_u \rho \left(u \frac{\partial \delta u}{\partial x} + v \frac{\partial \delta u}{\partial r} \right) d\Omega^e \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \tau_p \frac{\partial \delta u}{\partial x} \, d\Omega^e \end{aligned} \quad (B.15)$$

- mouvement radial (termes supplémentaires):

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2r (\mu + \mu_T) \frac{\partial v}{\partial r} \right] + 2 (\mu + \mu_T) \frac{v}{r^2} - \rho f_r \right\} \tau_u \rho \left(u \frac{\partial \delta v}{\partial x} + v \frac{\partial \delta v}{\partial r} \right) d\Omega^e \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \tau_p \left(\frac{\partial \delta v}{\partial r} + \frac{\delta v}{r} \right) d\Omega^e \end{aligned} \quad (B.16)$$

- continuité (termes supplémentaires):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[2(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \rho f_x \right\} \tau_u \frac{\partial \delta p}{\partial x} d\Omega^e \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2r(\mu + \mu_T) \frac{\partial v}{\partial r} \right] + 2(\mu + \mu_T) \frac{v}{r^2} - \rho f_r \right\} \tau_u \frac{\partial \delta p}{\partial r} d\Omega^e
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Note: pour le calcul de τ ou de τ_u on utilise (dans toutes les méthodes):

$$\tau_u = \frac{\delta h}{2V} \tag{B.18}$$

avec:

$$\delta = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \tag{B.19}$$

où:

$$Pe = \frac{\rho h V}{2(\mu + \mu_T)} \tag{B.20}$$

Pour τ_p on prend:

$$\tau_p = \frac{h}{2V} \tag{B.21}$$

Dans les deux cas, la taille de l'élément h est choisie comme étant le maximum de la projection des trois côtés de l'élément dans la direction de la vitesse.

B.2 Équation de transport de K

B.2.1 Méthode de Galerkin

- forme générale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla K - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \right] w \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla w \, d\Omega = \int_{\Gamma_{i_k}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial n} w \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

- cas axisymétrique:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial r} \right) - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left[\left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} w \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left(-\mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \right) w \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_{i_k}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial n} w \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

avec:

$$P(\mathbf{u}) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \quad (\text{B.24})$$

B.2.2 Méthode SU

- forme générale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla K - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \right] w \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla w \, d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla K \, \tau_k \mathbf{u} \cdot \nabla w \, d\Omega^e \\ = \int_{\Gamma_{i_k}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial n} w \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

- termes supplémentaires:

$$\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \rho \left(u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial r} \right) \tau_k \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} \right) d\Omega^e \quad (\text{B.26})$$

B.2.3 Méthode SUPG-incomplet

- forme générale:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla K - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \right] w \, d\Omega \\
 & \quad + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla w \, d\Omega \\
 & \quad + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \right\} \tau_k \mathbf{u} \cdot \nabla w \, d\Omega^e \\
 & \quad = \int_{\Gamma_{i_k}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial n} w \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

- termes supplémentaires:

$$\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial r} \right) - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \right\} \tau_k \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} \right) d\Omega^e \tag{B.28}$$

B.2.4 Méthode SUPG

- forme générale:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla K - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \right] w \, d\Omega \\
 & \quad + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla w \, d\Omega \\
 & \quad + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \right] - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla K \right. \\
 & \quad \quad \left. - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \right\} \tau_k \mathbf{u} \cdot \nabla w \, d\Omega^e \\
 & \quad = \int_{\Gamma_{i_k}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial n} w \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

- termes supplémentaires:

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial r} \right] \right. \\
 \left. - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left[\left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial r} \right)^2 \right] - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} \right\} \\
 \cdot \tau_k \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} \right) d\Omega^e
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

B.2.5 Méthode GLS

Tout comme pour les équations de mouvement, on néglige le terme de diffusion dans la variation du résidu.

- forme générale:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla K - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} \right] w d\Omega \\
 + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla w d\Omega \\
 \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \right] - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla K - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) \right. \\
 \left. + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} \right\} \tau_k \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla w + \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) w + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} w \right\} d\Omega^e \\
 = \int_{\Gamma_{i_k}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial n} w d\Gamma
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

- termes supplémentaires:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial r} \right] \right. \\ \left. - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left[\left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial r} \right)^2 \right] - \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} \right\} \\ \cdot \tau_k \left\{ \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \mu_T e^{-K} P(\mathbf{u}) w + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} w \right\} d\Omega^e \end{aligned} \quad (B.32)$$

Note: pour le calcul de τ_k on utilise (dans toutes les méthodes):

$$\tau_k = \frac{\delta h}{2V} \quad (B.33)$$

avec:

$$\delta = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (B.34)$$

où:

$$Pe = \frac{\rho h V}{2 \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right)} \quad (B.35)$$

B.3 Équation de transport de E

B.3.1 Méthode de Galerkin

- forme générale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla E - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right] w \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla w \, d\Omega = \int_{\Gamma_{ie}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial E}{\partial n} w \, d\Gamma \end{aligned} \quad (B.36)$$

- cas axisymétrique:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \left[\left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} w \, d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left(-\rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + \rho C_2 e^{E-K} \right) w \, d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_{i_\epsilon}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial E}{\partial n} w \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{B.37}$$

B.3.2 Méthode SU

- forme générale:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla E - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right] w \, d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla w \, d\Omega + \sum_{\epsilon=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^\epsilon} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla E \, \tau_\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla w \, d\Omega^\epsilon \\
 & = \int_{\Gamma_{i_\epsilon}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial E}{\partial n} w \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{B.38}$$

- termes supplémentaires:

$$\sum_{\epsilon=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^\epsilon} \rho \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial r} \right) \tau_\epsilon \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} \right) d\Omega^\epsilon \tag{B.39}$$

B.3.3 Méthode SUPG-incomplet

- forme générale:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla E - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right] w \, d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla w \, d\Omega \\
& \quad + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right\} \tau_\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla w \, d\Omega^e \\
& \quad = \int_{\Gamma_{i_\epsilon}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial E}{\partial n} w \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{B.40}$$

- termes supplémentaires:

$$\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right\} \tau_\epsilon \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} \right) d\Omega^e \tag{B.41}$$

B.3.4 Méthode SUPG

- forme générale:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla E - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right] w \, d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla w \, d\Omega \\
& \quad + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \right] - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \nabla E \right. \\
& \quad \quad \left. - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right\} \tau_\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla w \, d\Omega^e \\
& \quad = \int_{\Gamma_{i_\epsilon}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial E}{\partial n} w \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{B.42}$$

- termes supplémentaires:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \frac{\partial E}{\partial x} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \frac{\partial E}{\partial r} \right] \right. \\ \left. - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \left[\left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial r} \right)^2 \right] - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right\} \\ \cdot \tau_e \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} \right) d\Omega^e \end{aligned}$$

(B.43)

B.3.5 Méthode GLS

Tout comme pour les équations de mouvement, on néglige le terme de diffusion dans la variation du résidu.

- forme générale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \nabla E \cdot \nabla E - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right] w d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \nabla E \cdot \nabla w d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \nabla E \right] - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \nabla E \cdot \nabla E + C_2 \rho e^{E-K} \right. \\ \left. - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) \right\} \tau_e \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla w + \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) w + C_2 \rho e^{E-K} w \right\} d\Omega^e \\ = \int_{\Gamma_{i_e}} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \frac{\partial E}{\partial n} w d\Gamma \end{aligned}$$

(B.44)

- termes supplémentaires:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \frac{\partial E}{\partial x} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \frac{\partial E}{\partial r} \right] \right. \\ \left. - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e} \right) \left[\left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial r} \right)^2 \right] - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \right\} \\ \cdot \tau_e \left\{ \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) w + C_2 \rho e^{E-K} w \right\} d\Omega^e \end{aligned}$$

(B.45)

Note: pour le calcul de τ_ϵ on utilise (dans toutes les méthodes):

$$\tau_\epsilon = \frac{\delta h}{2V} \quad (\text{B.46})$$

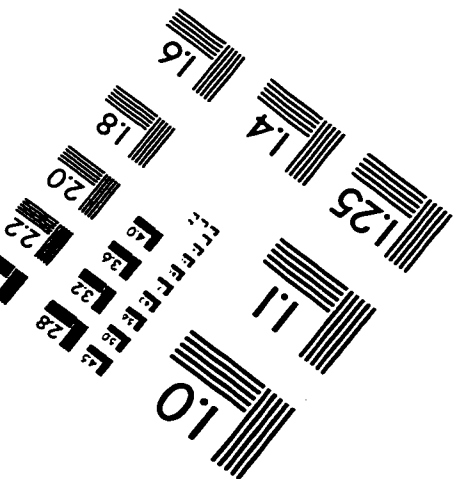
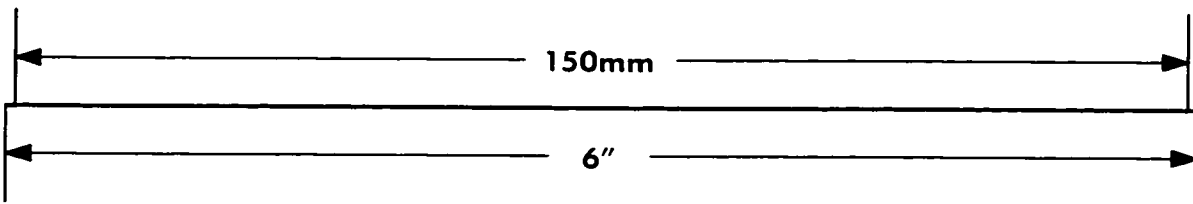
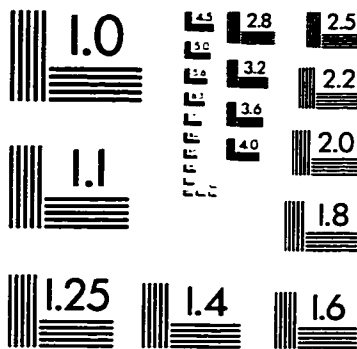
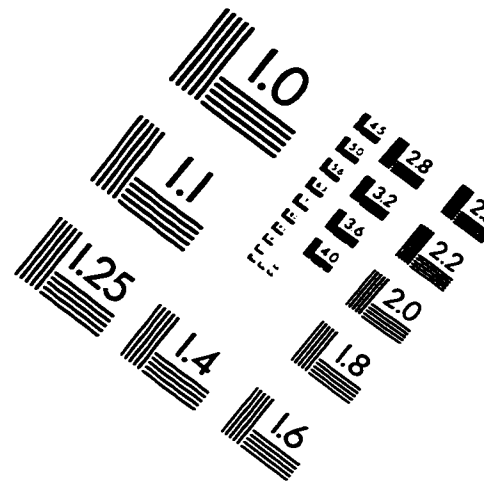
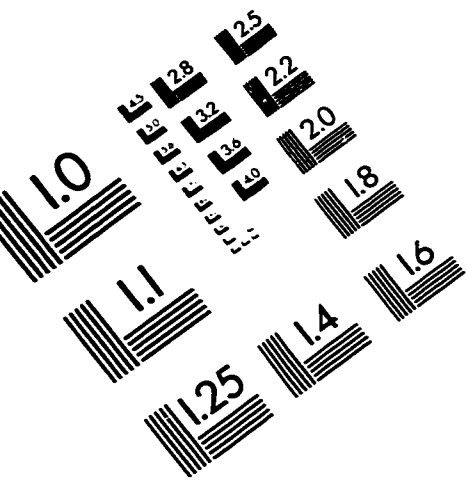
avec:

$$\delta = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (\text{B.47})$$

où:

$$Pe = \frac{\rho h V}{2 \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right)} \quad (\text{B.48})$$

IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc.
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved

